

## 5 Interferometrie mit einzelnen Teleskopen

### 5.1 Einleitung und Überblick

In diesem Kapitel werden Interferometer betrachtet, die sich mit Hilfe eines einzelnen Teleskops realisieren lassen. Man unterscheidet dabei **Interferometrie mit einzelner Öffnung** und **Interferometrie mit mehrfachen Öffnungen**. Im ersteren Fall wird die Bildentstehung in der Fokalebene eines gewöhnlichen Teleskops als ein (durch Aberrationen und Turbulenz gestörter) interferometrischer Prozeß verstanden. Im zweiten Fall wird die Eintrittsöffnung (Eintrittspupille) des Teleskops durch eine Maske modifiziert, um die optische Übertragungsfunktion auf eine gewünschte Weise zu verändern. Insbesondere gehören das **Fizeau-** und **Michelson-Stellar-Interferometer** zu dieser Klasse von Instrumenten. Hier ist häufig der Zweck, den Einfluss externer Aberrationen auf die Messung bestimmter Parameter der Quelle zu minimieren.

Wir werden im folgenden aus Gründen des besseren Verständnisses zunächst den Fall mehrfacher Öffnungen behandeln, bevor wir uns der Interferometrie mit einzelner Öffnung zuwenden.

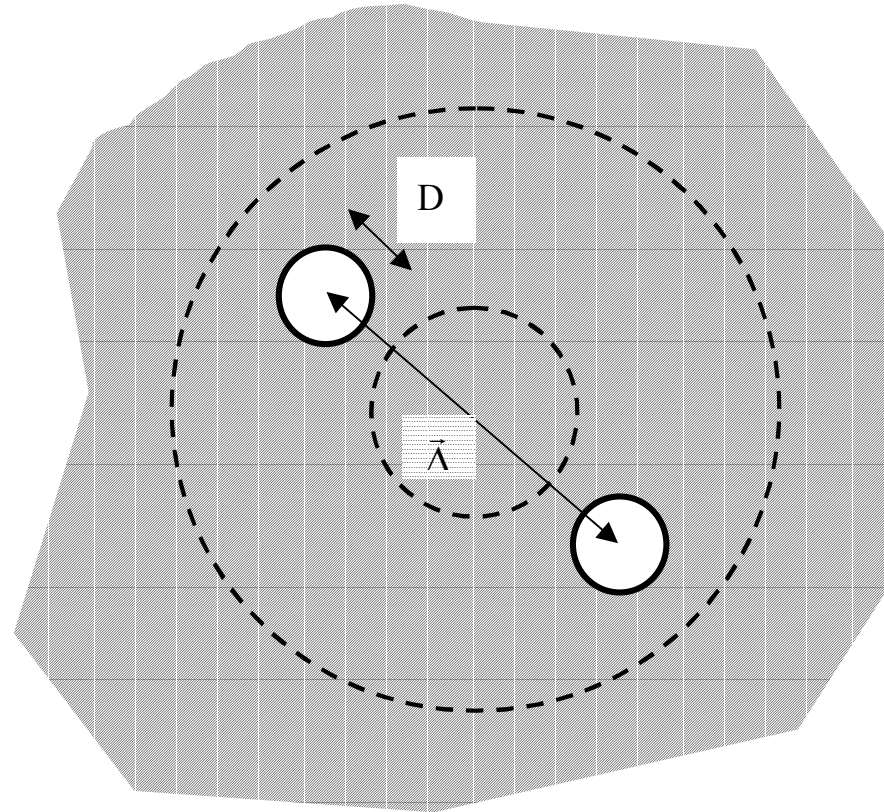
### 5.2 Interferometrie mit mehrfachen Öffnungen

#### 5.2.1 Fizeau-Interferometer

##### 5.2.1.1 OTF, PSF und Abbildungseigenschaften

Das Fizeau-Interferometer ist konzeptionell das einfachste seiner Art. Es besteht aus einer Maske mit zwei Löchern (siehe Abb. 3-2) an der Eintrittsöffnung eines Teleskops, welches durch eine einfache Linse (Abb. 3-5) idealisiert werden kann. In der Praxis wählt man ein einfach zugängliches Bild der **Aperturblende** (bei den meisten Teleskopen durch den Hauptspiegel gegeben), eine sogenannte **transferierte Pupille**, für die Montage einer entsprechend skalierten Maske. In aller Regel verwendet man kreisrunde Löcher mit Durchmesser  $D$  und einem Abstand  $\bar{\Delta}$  in Koordinaten der Pupille. Die Transmissionsfunktion der auf die Eintrittsöffnung des Teleskops projizierten Maske ist nun gegeben mit (s. Abb. 5-1):

$$W(\vec{r}) = \Pi\left(\frac{\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{\Delta}}{D}\right) + \Pi\left(\frac{\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{\Delta}}{D}\right) = \Pi\left(\frac{\vec{r}}{D}\right) \otimes \left[\delta\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{\Delta}\right) + \delta\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{\Delta}\right)\right] \quad (\text{V.1})$$



**Abbildung 5-1:** Fizeau-Interferometer

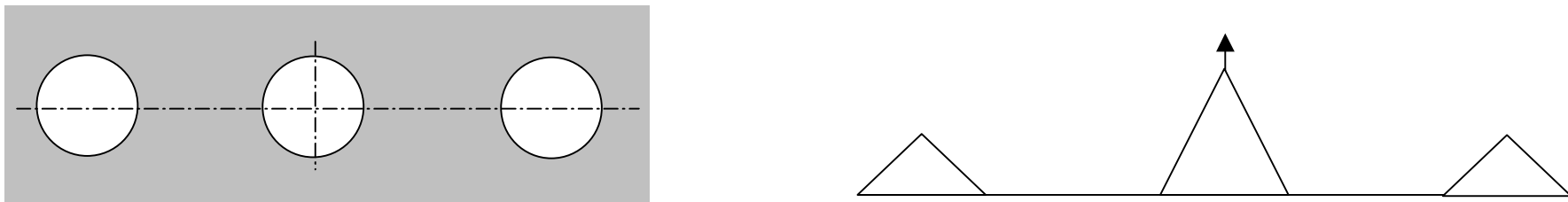
Die Optische Übertragungsfunktion ergibt sich aus der Autokorrelation von (V.1). Dazu verwenden wir die "Chinesenhutfunktion" (3.64):

$$CHF(\vec{s}) = \frac{2}{\pi} \left( \arccos(|\vec{s}|) - \sqrt{1-|\vec{s}|^2} \right) \quad (\text{V.2})$$

und erhalten

$$OTF(\vec{s}) = CHF\left(\frac{\lambda\vec{s}}{D}\right) \otimes \left[ 2\delta(\lambda\vec{s}) + \delta(\lambda\vec{s} - \vec{\Delta}) + \delta(\lambda\vec{s} + \vec{\Delta}) \right] \quad (\text{V.3})$$

Die OTF hat drei Beiträge; einen beim Frequenzursprung  $\vec{s} = \vec{0}$  und jeweils einen, nur mit der halben Amplitude des ersten, bei den Frequenzen  $\vec{s}_{\pm} = \pm \frac{\vec{\Delta}}{\lambda}$ . Die beiden letzteren Terme sind für die Interferenzstreifen verantwortlich.



**Abbildung 5-2:** Optische Übertragungsfunktion eines Fizeau-Interferometers

Die Punktverbreiterungsfunktion ergibt sich aus der Fourier-Transformierten von (V.3):

$$PSF(\vec{\vartheta}) = \text{Airy}\left(\frac{\vec{\vartheta}D}{\lambda}\right) \left[ 1 + \cos\left(\frac{\vec{\vartheta}\vec{\Delta}}{\lambda}\right) \right], \quad (\text{V.4})$$

wobei *Airy*(...) die in (3.66) definierte **Airyfunktion** ist.

Das Punktbild entspricht dem Beugungsscheibchen eines Teleskops mit der Öffnung  $D$  mit einer Halbwertsbreite von  $\approx \lambda/D$ , welches durchzogen ist von einem Interferenzmuster mit der Wellenlänge  $\lambda/|\vec{\Delta}|$ , die orientiert ist senkrecht zur Projektion der Basislänge  $\vec{\Delta}$ .

Richtet man das Interferometer auf eine Quelle, welche am Ort der Beobachtung Anlaß zu einer gegenseitigen Intensität  $I_0 \mu(\vec{s})$  gibt, so erhält man die beobachtete Intensitätsverteilung aus der Multiplikation der Kohärenzfunktion mit der OTF und nachfolgender Fourier-Transformation. Man sieht unmittelbar, dass das Fizeau-Interferometer den Anteil der Fourier-Komponente der Quellen-Intensitätsverteilung bei den Frequenzen  $\vec{s}_{\pm}$  in Form des Kontrastes des Interferogramms mißt. Damit erhält man als Intensitätsverteilung im Interferogramm:

$$I(\vec{\vartheta}) = 2 I_0 \text{Airy}\left(\frac{\vec{\vartheta} D}{\lambda}\right) \left[ 1 + \left| \mu\left(\frac{\vec{\Delta}}{\lambda}\right) \right| \cos\left(\frac{\vec{\vartheta} \vec{\Delta}}{\lambda} + \arg\left(\mu\left(\frac{\vec{\Delta}}{\lambda}\right)\right)\right) \right] \quad (\text{V.5})$$

Der Kontrast des Interferogramms hängt nun von dem Betrag des komplexen Kohärenzfaktors  $\mu$  der Quelle bei der Basislänge ab. Man nennt daher den **Betrag** des komplexen Kohärenzfaktors auch die **Kontrastfunktion** (*visibility function*). Die genaue Lage der Maxima und Minima des Interferograms hängt vom **komplexen Argument** (Phase) des komplexen Kohärenzfaktors ab, welcher in das Argument der Kosinusfunktion Einzug gefunden hat.

Offensichtlich ist die hochaufgelöste Information über die Quelle nur auf einen kleinen Bereich bei den Frequenzen  $\vec{s}_{\pm} = \pm \frac{\vec{\Delta}}{\lambda}$  begrenzt, und damit sehr limitiert. Komplexe Objekte können mit einem Interferometer mit einer Basislänge nur sehr unvollständig charakterisiert werden, allenfalls ist eine vage Aussage über die scheinbare Dimension der Quelle möglich. Um an mehr Information zu gelangen, muss man die Basislänge  $\vec{\Delta}$  variieren. Dies kann geschehen, indem man

- den Betrag oder
- die Richtung

der Basislänge ändert. Beim Fizeau-Interferometer kann man das realisieren, indem man die Maske veränderbar konstruiert (z. B. rotieren läßt) oder verschiedene Masken verwendet.

### 5.2.1.2 Störungen

Im allgemeinen beeinträchtigen verschiedene Störungen der Wellenfronten die Funktion eines Interferometers. Aberrationen, die durch den optischen Design oder die Fertigung des Teleskops zustande kommen, sowie Störungen durch Turbulenz (s. Kap. IV) führen zu bereits bekannten Fehlern, die sich dem Interferogramm überlagern. Wir wollen uns daher auf eine für Interferometer spezifische Klasse von Störungen beschränken, die des **Unterschiedes der optischen Weglänge** zwischen den Öffnungen. Dazu betrachten wir für jede Öffnung  $i$  einen konstanten Term  $\exp[j\phi_i]$  mit der Phase  $\phi_i = 2\pi \frac{l_i}{\lambda}$ , welcher die Störung der Wellenfront beschreiben soll. Diese Terme integrieren wir in die Pupillen-Transmissionfunktion (V.1):

$$W(\vec{r}) = \Pi\left(\frac{\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{\Delta}}{D}\right) \exp[j\phi_1] + \Pi\left(\frac{\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{\Delta}}{D}\right) \exp[j\phi_2] = \Pi\left(\frac{\vec{r}}{D}\right) \otimes \left[ \delta\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{\Delta}\right) \exp[j\phi_1] + \delta\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{\Delta}\right) \exp[j\phi_2] \right] \quad (\text{V.6})$$

Damit wird

$$OTF(\vec{s}) = CHF\left(\frac{\lambda\vec{s}}{D}\right) \otimes \left[ 2\delta(\lambda\vec{s}) + \delta(\lambda\vec{s} - \vec{\Delta}) \exp[j(\phi_2 - \phi_1)] + \delta(\lambda\vec{s} + \vec{\Delta}) \exp[-j(\phi_2 - \phi_1)] \right] \quad (\text{V.7})$$

und

$$PSF(\vec{\vartheta}) = \text{Airy}\left(\frac{\vec{\vartheta}D}{\lambda}\right) \left[ 1 + \cos\left(\frac{\vec{\vartheta}\vec{\Delta}}{\lambda} + (\phi_2 - \phi_1)\right) \right]$$

Ursachen für diese Art von Störungen sind:

- **geometrische Effekte** (z. B. Ausrichtung der Eintrittsöffnungen relativ zur Quelle),
- zeitlich stabile oder variable **instrumentelle Weglängenunterschiede** (z. B. Vibrationen),
- **Variationen** der optischen Weglänge **aufgrund turbulenter Brechungsindex-Variationen** des Mediums (Kap. IV).

Für ein Fizeau-Interferometer sind insbesondere die letzten beiden Ursachen von Belang, daher ist  $\phi_i = \phi_i(t)$ . Störungen durch die Erdatmosphäre sind der eigentliche Anlaß für die Verwendung von Fizeau-Interferometern gewesen. Solange der Durch-

messer  $D$  der Öffnungen nicht größer als der Fried-Parameter  $r_0$  ist, sind die durch die Atmosphäre erzeugten Aberrationen über jede einzelne Öffnung vernachlässigbar; und der Effekt der Turbulenz auf das beobachtete Interferogramm ist einzig eine zeitlich variable Verschiebung des Streifenmusters. Man wählt daher den Durchmesser  $D$  typischerweise so, dass es dem erwarteten Fried-Parameter entspricht, ca. 5 bis 15 cm. In diesem Falle ist die Varianz der Fluktuationen durch die Phasenstrukturfunktion (IV.22) und die Basislänge gegeben:

$$\langle [\phi_1(t) - \phi_2(t)]^2 \rangle = D_\phi(\bar{\Delta}) = 6.88 \left( \frac{|\bar{\Delta}|}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (\text{V.8})$$

Die beobachtete Intensitätsverteilung in der Fokalebene ist nun eine Funktion der Zeit:

$$I(\vec{\vartheta}, t) = 2 I_0 \text{Airy} \left( \frac{\vec{\vartheta} D}{\lambda} \right) \left[ 1 + \left| \mu \left( \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} \right) \right| \cos \left( \frac{\vec{\vartheta} \bar{\Delta}}{\lambda} + \arg \left( \mu \left( \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} \right) \right) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] \right) \right] \quad (\text{V.9})$$

Wegen der zeitlichen Abhängigkeit der Störungen und der prinzipiellen Unbeobachtbarkeit des Nullpunktes der Weglängendifferenz aufgrund instrumenteller Gegebenheiten ist das **Argument der komplexen Kohärenzfaktors** ("*Objekt-phase*") **keine gute Observable** für jede Art von Interferometer.

Die zeitliche Fluktuation erfordert Belichtungen, die kurz sind gegenüber den Zeitskalen der Fluktuationen. Für atmosphärische Turbulenz sind diese Skalen von der Größenordnung 10 ms im sichtbaren Spektralbereich bis einige 100 ms im thermalen Infrarot (10 $\mu$ m). Ähnlich wie bei der Adaptiven Optik kann man die Fluktuationen mit einem Kontrollgerät ("*fringe tracker*") messen und durch eine geeignete Einrichtung kompensieren, so daß das Interferogramm zeitlich stabil wird und längere Integrationen möglich sind. In beiden Fällen ist die Empfindlichkeit durch die Fluktuation eingeschränkt.

### 5.2.1.3 Endliche spektrale Bandbreite

Die Abbildungsgleichungen (V.5) und (V.9) gelten strikt nur für monochromatisches Licht der Wellenlänge  $\lambda$ . Läßt man eine endliche spektrale Bandbreite, z. B. ein Intervall zwischen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  zu, so verkürzt sich die zeitliche Kohärenzzeit  $\tau_c = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$  (s. a. III.16). Wird die aus dem Weglängenunterschied  $l_2 - l_1$  abgeleitete zeitliche Verzögerung  $\tau_{12} = \frac{l_2 - l_1}{c}$

zwischen den beiden Öffnungen von der Größenordnung der Kohärenzzeit, so ergibt sich ein von der zeitlichen Kohärenz verursachter Kontrastverlust. Gleichzeitig ergibt sich eine Variation der Periode des Interferogramms im Fokus mit der Wellenlänge des Lichts. Analog dazu erstreckt sich das Signal im Fourierraum radial über einen der spektralen Bandbreite entsprechenden Bereich, da die zur Basislänge gehörende Frequenz zur Wellenlänge umgekehrt proportional ist.



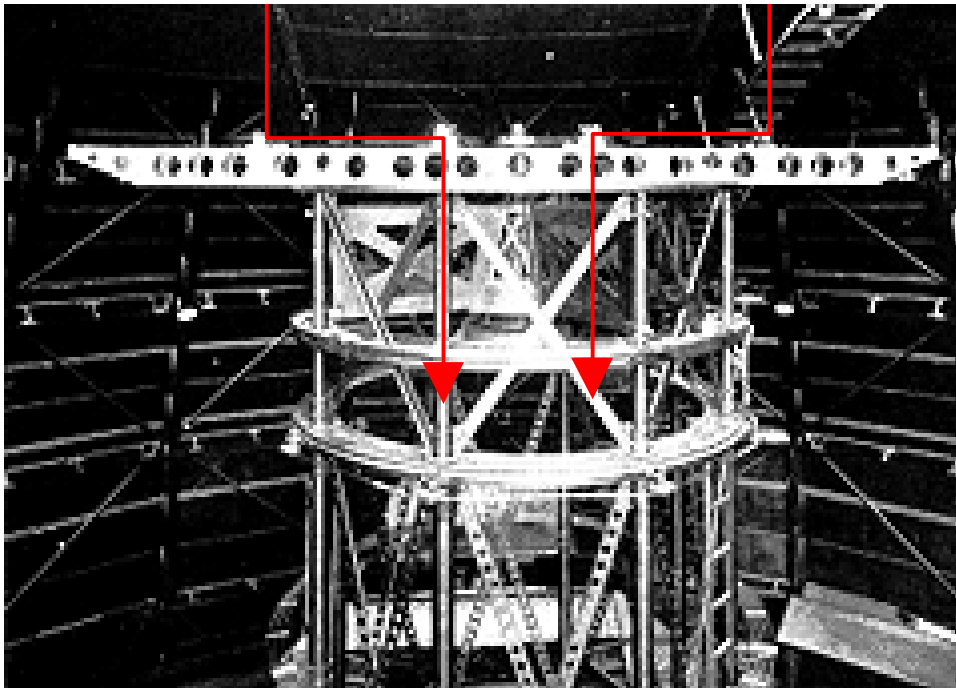
**Abbildung 5-3:** Übertragung breiter spektraler Bänder mit einem Fizeau-Interferometer.

Allgemein ausgedrückt hängt nun der gemessene Kontrast im Interferogramm vom komplexen Kohärenzgrad  $\gamma(\vec{\Delta}, \tau_{21})$  ab. Dies beinhaltet eine Mischung der strukturellen und spektralen Eigenschaften der Quelle, welche in der Astronomie i. d. R. sehr komplex sind. Daher werden Interferometer häufig entweder bei schmalen spektralen Bandbreiten (Filter) oder mit Spektrometern betrieben.

Eine Besonderheit des Fizeau-Interferometers ist, dass Gl. (V.5) für ein großes Gesichtsfeld gilt. Besteht die Quelle z. B. aus einer verteilten Ansammlung von Punktquellen (Sternhaufen), so trägt jede einzelne Punktquelle auch bei endlicher Bandbreite ihre eigenes Interferogramm. Im Unterschied zum Michelson-Interferometer korrigiert das Fizeau-Interferometer intern alle feldabhängigen geometrischen Weglängenunterschiede (*Homothetizität der Eintritts- und Austritts-Pupillen*).

## 5.2.2 Das Michelson'sche Stellar-Interferometer

Der Unterschied zwischen dem Michelson'schen Stellar-Interferometer und dem Fizeau-Interferometer besteht darin, dass die Licht sammelnden Eintrittsöffnungen im ersteren Fall nicht mit den Licht sammelnden Positionen in der Eintrittsöffnung des Teleskops übereinstimmen. Zwei mit Planspiegeln versehene Periskope leiten das Licht von einer Basislänge  $\bar{\Delta}$  in das Teleskop mit einer Basislänge  $\bar{\Delta}'$  (s. Abb. 5-4).



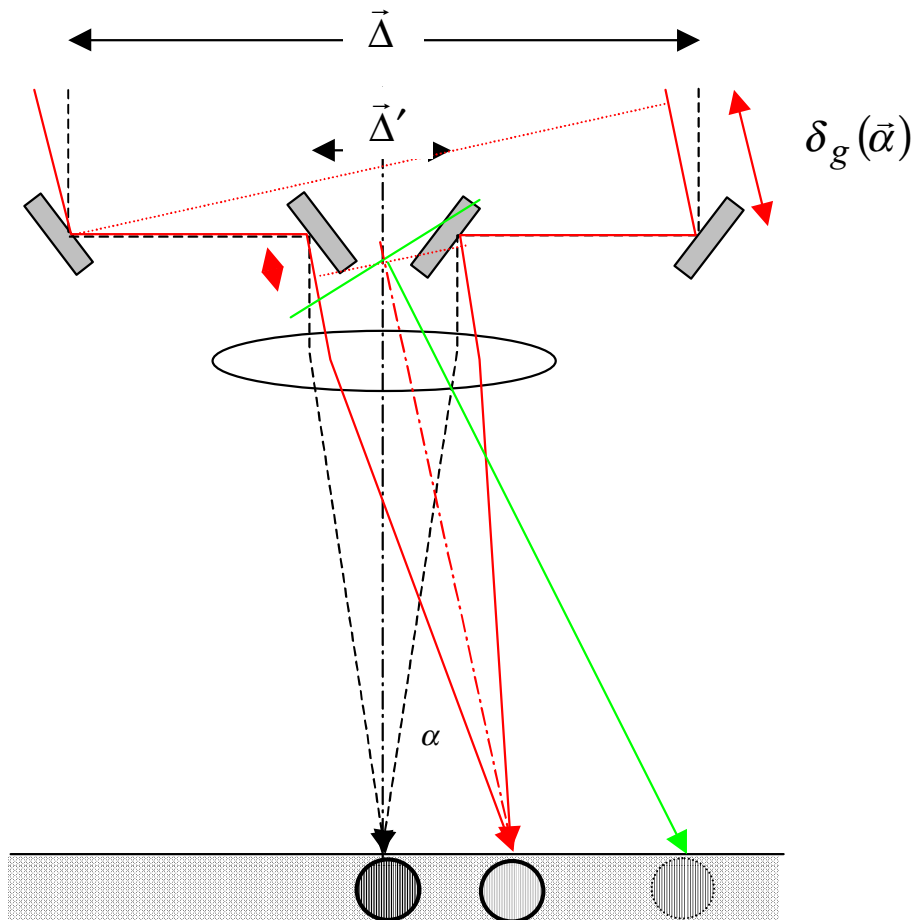
**Abbildung 5-4:** Michelson'sches Stellarinterferometer am 2.5m Hooker-Teleskop des MtWilson-Observatorium, USA.

Quelle: MtWilson-Observatorium

Der Grund für diese Maßnahme bei der Einführung dieses Typs eines Interferometers um 1919 war, dass die Öffnung des Hooker-Teleskops von 2.5 m für die Bestimmung von scheinbaren Durchmessern auch naher Riesensterne nicht ausreichte. Es bestand Bedarf von längeren, variablen Basislängen. Diese wurde durch einen Stahlträger am Kopfring des Teleskops mit vier verschieblich angeordneten Planspiegeln realisiert. Für die Betrachtung der Quelle ist die Basislänge relevant, die die Quelle "sieht". Im Falle der Abb. 5-4 ist das die von den beiden äußeren Spiegeln gebildete Basislänge  $\bar{\Delta}$ . Für die Periode des Interferenzmusters in der Fokalebene ist aber die von den beiden inneren Spiegeln gebildete Basislänge  $\bar{\Delta}'$  von Belang, die hier deutlich kürzer ist. Obwohl man den Kontrast eines Interferogramms mit einer Modulation  $\cos(\vartheta\bar{\Delta}'/\lambda)$  mißt, gehört dieser zu dem komplexen Kohärenzgrad der Quelle bei der Frequenz  $\bar{\Delta}/\lambda$ . Effektiv werden hier Fourierkomponenten der Quelle in dem beobachteten Fourierraum "umverteilt".

Die beobachtete störungsfreie, monochromatische Intensitätsverteilung auf der optischen Achse ist daher gegeben mit

$$I(\vec{\vartheta}) = 2 I_0 \text{Airy} \left( \frac{\vec{\vartheta} D}{\lambda} \right) \left[ 1 + \left| \mu \left( \frac{\vec{\Delta}}{\lambda} \right) \right| \cos \left( \frac{\vec{\vartheta} \vec{\Delta}'}{\lambda} + \arg \left( \mu \left( \frac{\vec{\Delta}}{\lambda} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{V.10})$$



Das Umverteilen der Fourier-Komponenten führt zu drastischen Leistungseinbußen bei größeren Gesichtsfeldern. Für eine Quelle, die um einen Winkel  $\vec{\alpha}$  außerhalb der optischen Achse des Interferometers beobachtet wird, gleichen sich die geometrischen Verzögerungen  $\delta_g(\vec{\alpha})$  und  $\delta'_g(\vec{\alpha})$  (s. Abb. 5-5) nicht aus. Diese sind gegeben mit

$$\delta_g(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\Delta} \quad (\text{V.11})$$

$$\delta'_g(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\Delta}'$$

Infolge dessen verschwindet der Weglängenunterschied durch die beiden Arme des Interferometers am Ort des außeraxialen Bildes (rote Pfeile) nicht. Er tut dies erst für einen Feldwinkel  $\vec{\beta} = \vec{\alpha} \frac{|\vec{\Delta}|}{|\vec{\Delta}'|}$  (grüner Pfeil). Der Weglängenunterschied am Ort des Bildes beträgt

$$\delta(\vec{\alpha}) = \delta_g(\vec{\alpha}) - \delta'_g(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} (\vec{\Delta} - \vec{\Delta}') \quad (\text{V.12})$$

In den Gln. (V.11) und (V.12) sind Produkte von Vektoren als (zweidimensionale) Skalarprodukte zu verstehen, wobei Richtungsvektoren  $\vec{\alpha}$  und  $\vec{\beta}$  die zweidimensionale Projektionen der dreidimensionalen Ein-

Abbildung 5-5: zum Feldeffekt beim Michelson-Interferometer.

heitsvektoren in Richtung der Quellen auf die Ebene der Eintrittsöffnung sind.

Der Feldeffekt führt zur Abnahme des gemessenen Kontrasts aufgrund des Verlustes an zeitlicher Kohärenz durch die geometrische Verzögerung  $\delta(\vec{\alpha})$ . Die Kontrastabnahme ist somit eine Funktion des Spektrums der Quelle und der Transmissionseigenschaften des Interferometers. Er kann durch spektrale Dispersion des Lichts reduziert werden. Der Effekt tritt in der in Abb. 5-5 dargestellten Anordnung nur in Richtung der Basislänge auf.

Die sonstigen Eigenschaften des Michelson-Interferometers sind denen des Fizeau-Interferometers gleich (s. Abschn. 5.2.1.1 bis 5.2.1.3). Man kann das Fizeau-Interferometer als eine Sonderform des Michelson-Interferometers mit  $\vec{\Delta} = \vec{\Delta}'$  auffassen.

### 5.2.3 Interferometer mit mehr als zwei Aperturen

#### 5.2.3.1 Pupillentransmission, OTF und PSF

Sowohl die Fizeau- als auch die Michelson-Konfiguration kann mit mehr als nur zwei Aperturen in der Maske realisiert werden. Der Einfachheit halber werden wir im folgenden nur Fizeau-Interferometer betrachten. Die Motivation für die Verwendung von mehr als zwei Öffnungen in der Maske ist die Zunahme der Zahl der Basislängen, und damit der gemessenen Fourier-Komponenten des Objekts.

Wir betrachten eine Konfiguration von  $N$  identischen, kreisrunden Öffnungen mit Durchmesser  $D$  in einer Maske. Ihre Mittelpunkte seien durch die Positionen  $\vec{r}_i$ ,  $i=1, \dots, N$  gegeben. Die (störungsfreie) Pupillentransmission läßt sich beschreiben mit

$$W(\vec{r}) = \Pi\left(\frac{\vec{r}}{D}\right) \otimes \left[ \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right] \quad (\text{V.12})$$

Jedes Paar  $i, j$  von Öffnungen produziert eine Basislänge  $\vec{\Delta}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ , welche eine Fourierkomponente im Objekt messen kann. Die Zahl der messbaren Fourierkomponenten hängt ab von der Gesamtzahl der Basislinien zwischen zwei Aperturen und ihrer **Redundanz**. Zwei Basislängen  $\Delta_{ij}, \Delta_{kl}$  heißen **redundant**, wenn gilt  $\Delta_{ij} = \Delta_{kl}$ ; sie messen dann dieselbe Komponente im Fourierspektrum des Objekts. Die Zahl der messbaren Fourierkomponenten ist dann die Zahl der nicht redundanten Basislängen. Eine Konfiguration von Öffnungen ohne redundante Basislängen heißt **nichtredundant** (*non redundant*).

Die OTF einer solchen Konfiguration ist gegeben mit

$$OTF(\vec{s}) = CHF\left(\frac{\lambda\vec{s}}{D}\right) \otimes \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta(\lambda\vec{s} - \vec{\Delta}_{ij}) \right] = CHF\left(\frac{\lambda\vec{s}}{D}\right) \otimes \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta(\lambda\vec{s} - (\vec{r}_j - \vec{r}_i)) \right] \quad (\text{V.13})$$

Man beachte, daß  $\vec{\Delta}_{ii} = \vec{0}$ , damit gibt es  $N$  einander überlagernde "Chinesenhutfunktionen" am Ursprung des Fourierraums. Außerdem ist  $\vec{\Delta}_{ji} = -\vec{\Delta}_{ij}$ , somit gibt es für jede Komponente der OTF ein zum Ursprung symmetrisches Spiegelbild. Berücksichtigt man die Spiegelbilder nicht, so gibt es in einem Array mit  $N$  Elementen  $\frac{N}{2}(N-1)$  Basislängen.

Zu jeder Basislänge  $\lambda\vec{s} = \vec{\Delta}_{ij}$  gibt es einen von der Chinesenhut-Funktion abgedeckten Bereich, für welchen Fourierkomponenten des Objekts gemessen werden können. Die Abdeckung der Fourierebene mit solchen Bereichen nennt man traditionell die "**UV-Überdeckung**". Dieser Begriff stammt aus der Radioastronomie, wo die zweidimensionalen Koordinaten der Domäne der Objekt-Fouriertransformierten mit  $u$  und  $v$  bezeichnet werden.

Die PSF eines Arrays ist kompliziert. Sie entspricht dem Beugungsscheibchen eines einzelnen Elements, welches nun von einem System von  $\frac{N}{2}(N-1)$  Interferenzstreifenmustern durchzogen ist. Diese hängen von Abstand und Orientierung der Basislängen ab.

### 5.2.3.2 Störungen bei Konfigurationen mit mehr als zwei Öffnungen, Phasenschlußbeziehung

Analog zum Kapitel 5.2.1.2 betrachten wir als Störung einen konstanten Term  $\exp[j\phi_i]$  mit der Phase  $\phi_i = 2\pi \frac{l_i}{\lambda}$ , welcher eine konstante Verzögerung  $l_i$  der Wellenfront über die Öffnung  $i$  beschreibt. Damit wird die OTF (V.13)

$$OTF(\vec{s}) = CHF\left(\frac{\lambda\vec{s}}{D}\right) \otimes \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta(\lambda\vec{s} - \vec{\Delta}_{ij}) \exp j(\phi_j - \phi_i) \right] \quad (\text{V.14})$$

Betrachtet man die komplexe Phase  $\psi_{ij}$  einer Messung eines Interferogramms bei der Basislänge  $\lambda\vec{s} = \vec{\Delta}_{ij}$ , so setzt sie sich

aus der Objektphase  $\psi_{O,ij} = \arg\left(\mu\left(\frac{\vec{\Delta}_{ij}}{\lambda}\right)\right)$  und dem Störterm aus (V.14) zusammen:

$$\psi_{ij} = \psi_{O,ij} + \phi_j - \phi_i \quad (\text{V.15})$$

Wie schon vorher bemerkt, sind Objektphase und Störterme einer Basislänge voneinander nicht zu unterscheiden.

Man kann aber mit Hilfe von (V.15) eine Größe, die **Phasenschlußbeziehung**  $\Psi_{ijk}$  (*phase closure relation*) konstruieren, welche nur mehr von den Objektphasen verschiedener Basislängen abhängt:

$$\begin{aligned} \Psi_{ijk} &\equiv \psi_{ij} + \psi_{jk} + \psi_{ki} \\ &= \psi_{O,ij} + \phi_j - \phi_i + \psi_{O,jk} + \phi_k - \phi_j + \psi_{O,ki} + \phi_i - \phi_k \\ &= \psi_{O,ij} + \psi_{O,jk} + \psi_{O,ki} \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

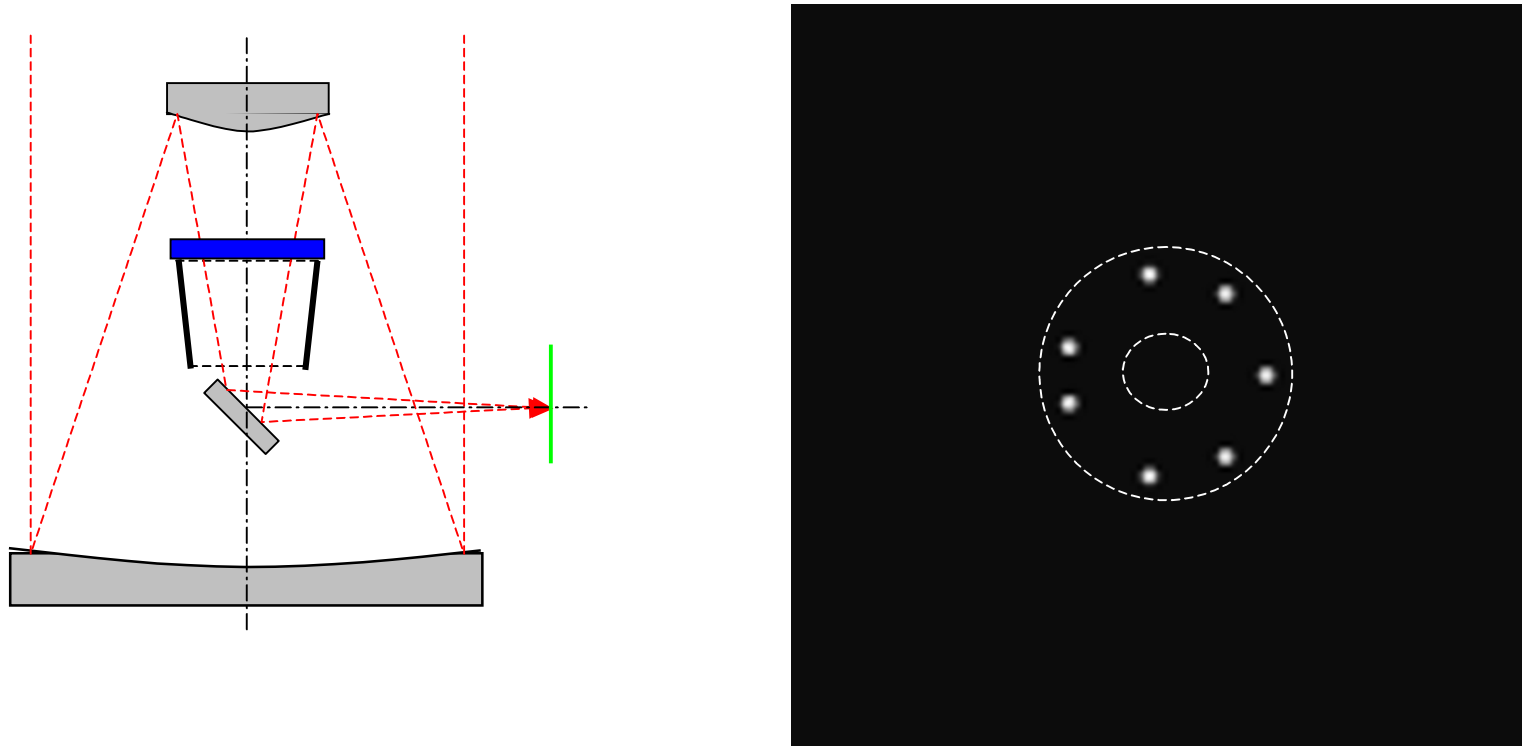
Die Zahl der konstruierbaren Phasenschlußbeziehungen in einem Array mit  $N$  Elementen beträgt  $\frac{N}{6}(N-1)(N-2)$ , ist also sehr groß. Sie sind hochgradig linear abhängig, so daß sich aus den Phasenschlußbeziehungen die Objektphasen nicht eindeutig rekonstruieren lassen. In der Tat gibt es in einem nichtredundanten Array nur  $\frac{N}{2}(N-1) - (N-1)$  unabhängige Beziehungen; d. h., die Zahl der Basislängen minus der Zahl der unbekanntenen Störungen  $\phi_i$  weniger einer. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Zahlen für bis zu sechs Elemente eines Arrays.

| Zahl der Elemente<br>$N$ | Zahl der Basislängen<br>$\frac{N}{2}(N-1)$ | Zahl der<br>Phasenschlußrelationen<br>$\frac{N}{6}(N-1)(N-2)$ | Zahl der unabhängigen<br>Phasenschlußrelationen<br>$\frac{N}{2}(N-1)$ |
|--------------------------|--|---|---|
| 2                        | 1  | 0   | 0   |
| 3                        | 3  | 1   | 1   |
| 4                        | 6  | 4   | 3   |
| 5                        | 10   | 10  | 6   |
| 6                        | 15   | 20  | 10  |

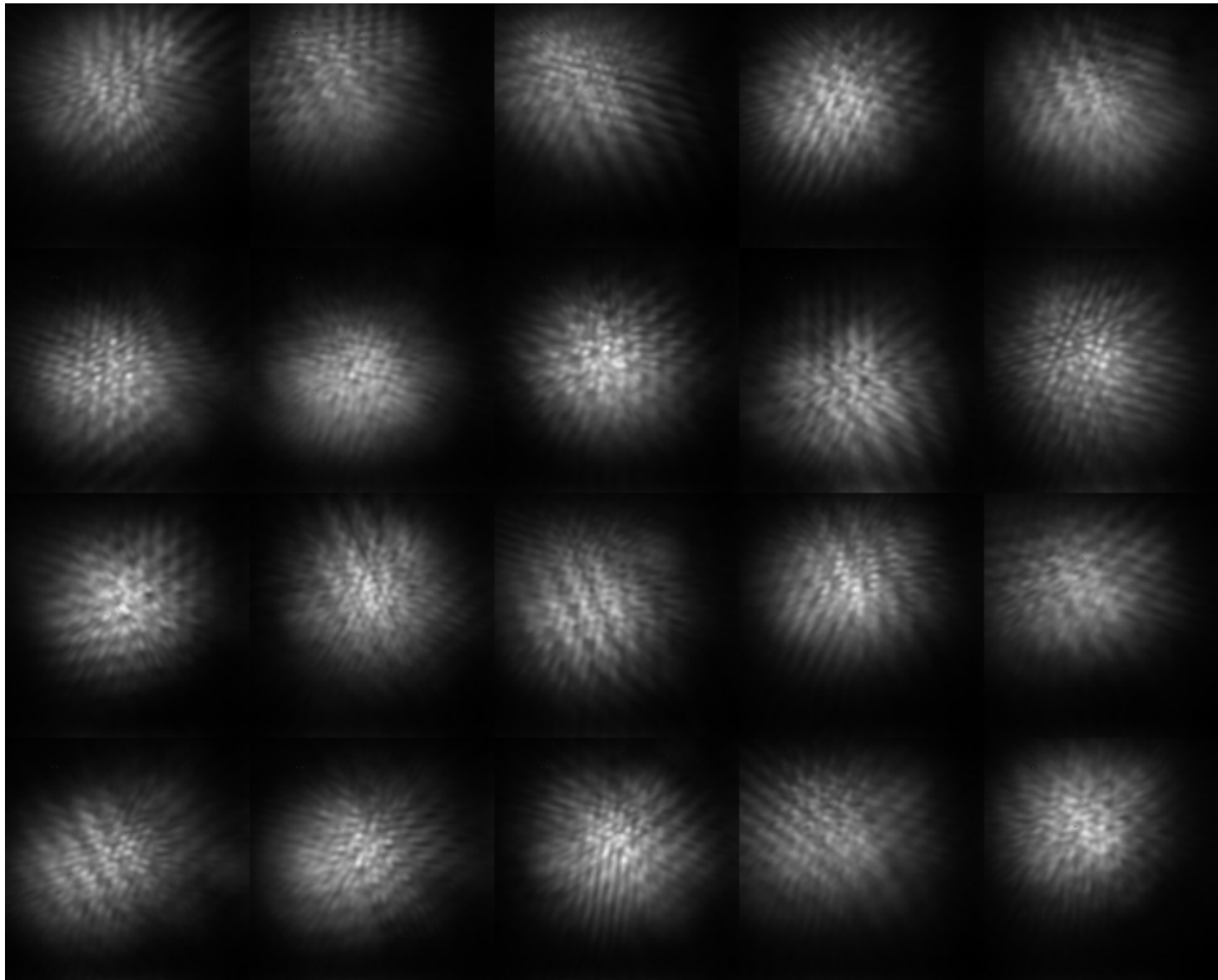
Obwohl die Information aus Phasenschlußbeziehungen unvollständig ist, ist sie ein wichtiges Hilfsmittel zur Rekonstruktion der Information über die Quelle.

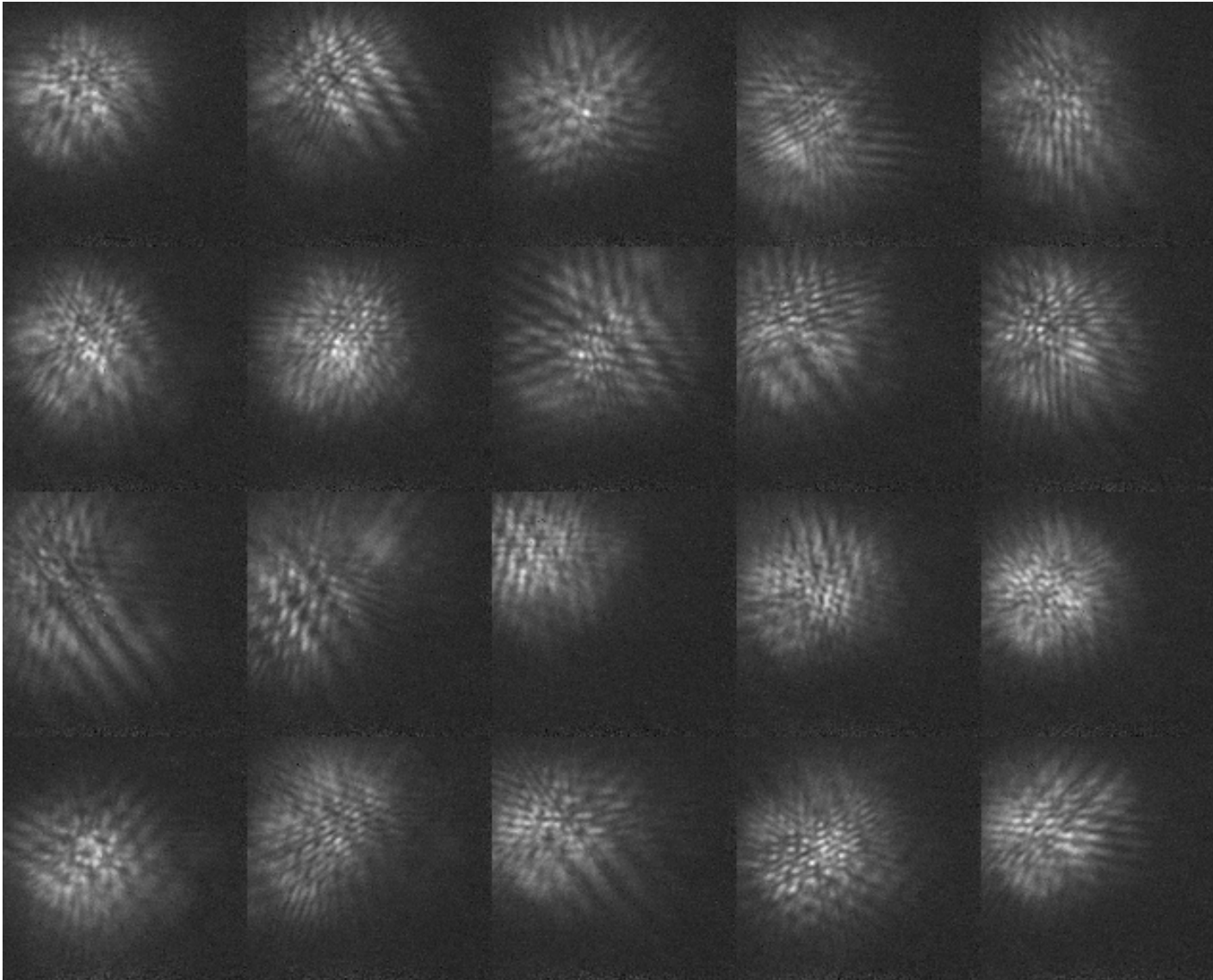
## 5.2.4 Beispiele

Beobachtungen des Riesensterns R Doradus (R Dor) im Juni 1995 mit dem ESO NTT (La Silla Observatory)



Links: Fizeau-Interferometer am NTT (blau: Position der Maske). Rechts: Konfiguration von sieben Löchern in der Maske.

**R Doradus: Programmquelle**

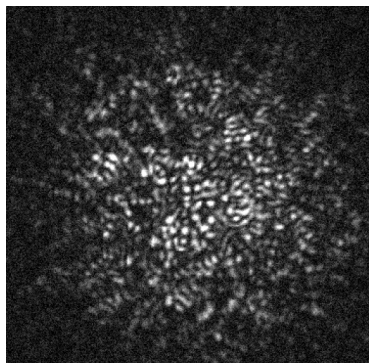
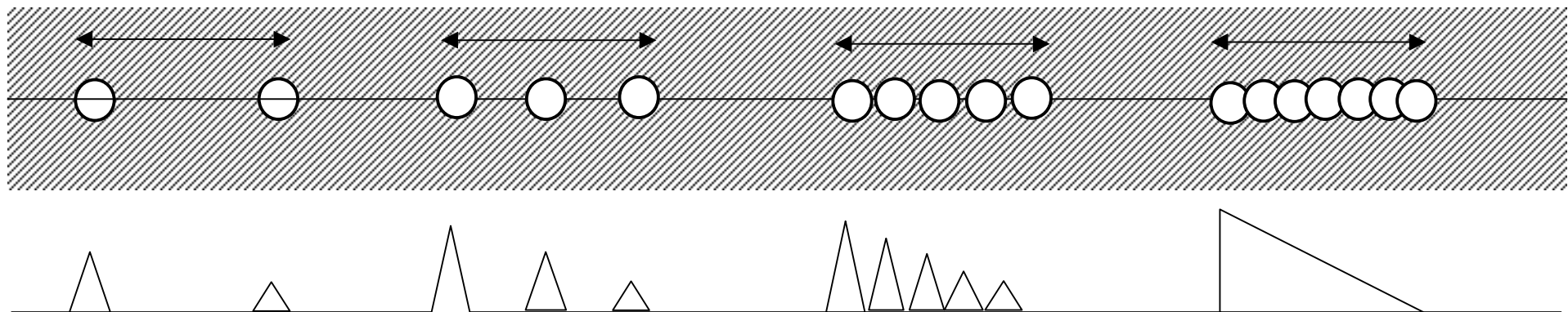


**R Doradus:** Referenzquelle (unaufgelöster Stern)

## 5.3 Interferometrie mit einfacher Öffnung - Speckle-Interferometrie

### 5.3.1 Einleitung

Mann kann die Beobachtung einer Quelle mit einem einzelnen Teleskop, welches eine Öffnung  $D \gg r_0$  hat, als einen Grenzfall eines (nichtredundanten) Interferometers mit vielen Öffnungen des Durchmessers  $r_0$  ("Subaperturen") auffassen. Jedes Paar von Subaperturen gibt Anlaß zu einem Satz von Interferenzstreifen im Bild, dessen Position (d. h., Phase) von der Differenz der optischen Phase der jeweiligen Subaperturen bestimmt ist. Die Überlagerung alle Interferenzmuster ergibt ein Zufallsmuster, dessen Ausdehnung in Winkelkoordinaten von der Größenordnung  $\lambda/r_0$  ist, welches aber Feinstruktur von der Größenordnung  $\lambda/D$  enthält, d. h. die mit der größten, in der Eintrittsöffnung des Teleskops vorhandenen Basislänge gegeben ist.



Die sich so ergebende Intensitätsverteilung in der Fokalebene bei einem durch atmosphärische Turbulenz gestörten Teleskop nennt man ein **Speckle-Interferogramm** (Speckleogramm). Wegen der zeitlichen Variabilität der Turbulenz ändert sich die Intensitätsverteilung rasch über Zeitskalen, die durch die atmosphärische Korrelationszeit gegeben ist:

$$\tau_0 = \frac{r_0}{V} \quad (\text{V.17})$$

Hierbei ist  $\bar{V}$  eine gewichtete mittlere Geschwindigkeit der die Brechungsindexfluktuationen tragenden Luftschichten. Typische Werte für  $\tau_0$  betragen 10 ms im sichtbaren Spektralbereich bis einige 100 ms im Infraroten.

Das Specklegramm einer Punktlichtquelle ist die Fouriertransformierte der momentanen Transferfunktion (IV.33). Die direkte Mittelung vieler Specklegramme ergibt daher die Fourier-Transformierte der Langzeit-OTF (IV.38). **Antoine Labeyrie** erkannte 1970, dass in den Specklegrammen einfacher Objekte Informationen über die Feinstruktur der Quellen enthalten sein kann. Betrachtet man z. B. einen engen Doppelstern, so erzeugt jede der beiden Komponenten dieselbe Intensitätsverteilung (mit Ausnahme eines durch den Helligkeitsunterschied der Komponenten gegebenen Faktors). Die beiden Specklegramme superponieren inkohärent und führen dazu, dass jeder helle Punkt doppelt auftaucht, und zwar in Abstand und Richtung der Separation des Doppelsterns entsprechend. Die Autokorrelation des Intensitätsmusters sollte daher abgesehen vom zentralen Maximum zwei Nebenmaxima an Positionen, die Richtung und Abstand des Doppelsterns entsprechen, aufweisen. Mittelt man die Autokorrelationen vieler Specklegramme, so mitteln sich zufällige Fluktuationen rasch weg, und man erhält die Autokorrelation der Quelle auf einem glatten, homogenen Hintergrund (**astronomische Speckle-Interferometrie**).

Labeyrie's Idee wurde rasch aufgegriffen und auf Quellen beliebiger Komplexität erweitert. Dabei hilft die Einfachheit des Verfahrens, welche außer einer hochauflösenden Kamera, welche viele kurz belichtete Bilder aufnehmen kann, kaum außergewöhnliche technische Voraussetzungen erfordert. Heute verwendete, abgeleitete Verfahren sind in der Lage, statt einer einfachen Autokorrelation hochaufgelöste Bilder zu produzieren.

### 5.3.2 Polyspektren

Die Wiedergewinnung der hochaufgelösten Information aus den Specklegrammen erfordert eine **statistische Analyse der Intensitätsverteilung**, d. h., die Bildung geeigneter Mittelwerte von statistischen Deskriptoren, da direkte Mittelwerte diese Information auslöschen. Die Autokorrelation ist eine solche Methode. Im allgemeinen kann man geeignete Deskriptoren im dualen Raum besser formulieren als im direkten Raum. Dies geschieht über die isoplanare Abbildungsgleichung (IV. 36),

$$\tilde{I}(\vec{s}, t) = \tilde{I}_0(\vec{s}) S(\vec{s}, t) \quad (\text{IV.36})$$

Viele Verfahren der Speckle-Interferometrie verwenden Mittelwerte über **Polyspektren** der beobachteten Intensitätsverteilung  $I(\vec{\vartheta}, t)$ . Ein Polyspektrum der Ordnung  $n, m$  ist definiert mit

$$P^{n,m}(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n, \vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_m) := \left\langle \tilde{I}(\vec{s}_1, t) \tilde{I}(\vec{s}_2, t) \cdots \tilde{I}(\vec{s}_n, t) \tilde{I}^*(\vec{t}_1, t) \tilde{I}^*(\vec{t}_2, t) \cdots \tilde{I}^*(\vec{t}_m, t) \right\rangle \quad (\text{V.18})$$

Dabei sind  $\vec{s}_i$  und  $\vec{t}_i$  zweidimensionale Frequenzvektoren und  $t$  ist die Zeit. Ein Polyspektrum besteht demnach aus dem ergodischen Mittelwert der Fouriertransformierten des Zufallsprozesses  $I(\vec{\vartheta}, t)$ , multipliziert mit sich selbst zur selben Zeit bei unterschiedlichen Frequenzen  $\vec{s}_i$  und  $\vec{t}_i$ . Man beachte, daß (V.18)  $n$  Faktoren der (nicht konjugierten) Fouriertransformierten und  $m$  Faktoren der konjugiert komplexen Fouriertransformierten beinhaltet. Die Summe  $n + m$  heißt die Ordnung des Polyspektrums.

### 5.3.3 Polyspektren 2. Ordnung: Knox-Thompson- und Labeyrie- Verfahren

#### 5.3.3.1 Definitionen

Das Polyspektrum 2. Ordnung  $P^{1,1}(\vec{s}_1, \vec{t}_1)$  heißt (verallgemeinertes) **Knox-Thompson-sches Kreuzspektrum (KT-Spektrum)**. Es wurde von K. Knox und B. Thompson 1974 für ein Rekonstruktionsverfahren der Feinstruktur astronomischer Quellen vorgeschlagen. Setzen wir die Abbildungsgleichung (IV.36) in (V.18) für  $n, m = 1$  ein, so erhalten wir

$$P^{1,1}(\vec{s}, \vec{t}) = \left\langle \tilde{I}(\vec{s}, t) \tilde{I}^*(\vec{t}, t) \right\rangle = \tilde{I}_0(\vec{s}) \tilde{I}_0^*(\vec{t}) \left\langle S(\vec{s}, t) S^*(\vec{t}, t) \right\rangle \quad (\text{V.19})$$

(Man unterscheide zwischen  $\vec{t}$  und  $t$ !) In der ursprünglichen Formulierung von Knox und Thompson wird der Frequenzvektor  $\vec{t}$  in der Form seiner Differenz zum Vektor  $\vec{s}$  ausgedrückt:

$$\vec{t} = \vec{s} - \vec{\Delta}$$

$$P^{1,1}(\vec{s}, \vec{s} - \vec{\Delta}) = \left\langle \tilde{I}(\vec{s}, t) \tilde{I}^*(\vec{s} - \vec{\Delta}, t) \right\rangle = \tilde{I}_0(\vec{s}) \tilde{I}_0^*(\vec{s} - \vec{\Delta}) \left\langle S(\vec{s}, t) S^*(\vec{s} - \vec{\Delta}, t) \right\rangle \quad (\text{V.20})$$

Ein Spezialfall des KT-Spektrums ergibt sich für  $\vec{s} = \vec{t}$ . Hier erhält man das **mittlere Leistungsspektrum der Bildintensität**:

$$P^{1,1}(\vec{s}, \vec{s}) = \left\langle \tilde{I}(\vec{s}, t) \tilde{I}^*(\vec{s}, t) \right\rangle = \left\langle |\tilde{I}(\vec{s}, t)|^2 \right\rangle = |\tilde{I}_0(\vec{s})|^2 \left\langle |S(\vec{s}, t)|^2 \right\rangle \quad (\text{V.21})$$

Dies ist genau die Fourier-Transformierte der mittleren Autokorrelation der Bildintensität und damit die Formulierung des **Labeyrie-Verfahrens** im dualen Raum. Historisch gesehen wurde das Labeyrie-Verfahren vor dem KT-Verfahren vorgeschlagen, letzteres hat sich aus dem ersten entwickelt. Beiden Verfahren ist gemeinsam, dass in den Polyspektren Information über die Quelle erhalten bleiben bei Frequenzen, für die gilt  $|\vec{s}|, |\vec{t}| > \frac{r_0}{\lambda}$ . Diese Information wird zur Wiederherstellung der Objektinformation für alle Frequenzen innerhalb der Beugungsgrenze verwendet. In welchem Rahmen diese Feststellung gilt, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

### 5.3.3.2 Übertragungsfunktionen des Labeyrie- und Knox-Thompson - Verfahrens

Eine Inspektion von (V.21) zeigt, dass das beobachtete mittlere Polyspektrum (in der isoplanaren Näherung) in einen objektabhängigen Faktor  $|\tilde{I}_0(\vec{s})|^2$  und einem atmosphärisch-instrumentellen Faktor  $\langle |S(\vec{s}, t)|^2 \rangle$  separierbar ist. Letzterer übernimmt die Funktion einer Transferfunktion für Polyspektren der beobachteten Quellen, man nennt ihn daher die **Speckle-Transferfunktion** (STF). Er läßt sich mit Hilfe der momentanen Übertragungsfunktion (IV.33) berechnen, die hier noch einmal für den isoplanaren Fall aufgeschrieben ist:

$$S(\vec{s}, t) = \iint W(\vec{\sigma} - \vec{\Delta}/2) W^*(\vec{\sigma} + \vec{\Delta}/2) \exp[-j(\phi(\vec{\sigma} - \vec{\Delta}/2, t) - \phi(\vec{\sigma} + \vec{\Delta}/2, t))] d\vec{\sigma} \quad (\text{V.22})$$

Wir erhalten somit durch Einsetzen von (V.22)

$$\begin{aligned} STF(\vec{s}) &= \langle |S(\vec{s}, t)|^2 \rangle \\ &= \left\langle \left| \iint W\left(\vec{\sigma} - \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) W^*\left(\vec{\sigma} + \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) \exp\left[-j\left(\phi\left(\vec{\sigma} - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma} + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right)\right)\right] d\vec{\sigma} \right|^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

Im den nächsten Schritten werden folgende Operationen durchgeführt:

- Das Betragsquadrat des Integrals wird als Produkt zweier unabhängiger Integrale formuliert.

- Terme, die die Pupillentransmission und die Phasenfluktuationen beinhalten, werden zusammengefasst.
- Mittelwertbildung und Integration werden vertauscht.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
STF(\vec{s}) &= \left\langle \left| \iint W\left(\vec{\sigma} - \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) W^*\left(\vec{\sigma} + \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) \exp\left[-j\left(\phi\left(\vec{\sigma} - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma} + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right)\right)\right] d\vec{\sigma} \right|^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \iint W\left(\vec{\sigma}_1 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) W^*\left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) \exp\left[-j\left(\phi\left(\vec{\sigma}_1 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right)\right)\right] d\vec{\sigma}_1 \right. \\
&\quad \left. \iint W^*\left(\vec{\sigma}_2 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) W\left(\vec{\sigma}_2 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) \exp\left[+j\left(\phi\left(\vec{\sigma}_2 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma}_2 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right)\right)\right] d\vec{\sigma}_2 \right\rangle \quad (V.24) \\
&= \iiint W\left(\vec{\sigma}_1 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) W^*\left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) W^*\left(\vec{\sigma}_2 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) W\left(\vec{\sigma}_2 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}\right) \\
&\quad \left\langle \exp\left[-j\left\{\phi\left(\vec{\sigma}_1 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma}_2 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) + \phi\left(\vec{\sigma}_2 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right)\right\}\right] \right\rangle d\vec{\sigma}_2 d\vec{\sigma}_1
\end{aligned}$$

Wie schon in früheren Fällen läßt sich nun die Mittelung über den komplexen Exponentialterm durch einen Mittelwert über das Quadrat des Exponenten ausdrücken. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
&\left\langle \exp\left[-j\left\{\phi\left(\vec{\sigma}_1 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma}_2 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) + \phi\left(\vec{\sigma}_2 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right)\right\}\right] \right\rangle \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2} \left\langle \left[ \phi\left(\vec{\sigma}_1 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\vec{\sigma}_2 - \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) + \phi\left(\vec{\sigma}_2 + \frac{\lambda\vec{s}}{2}, t\right) \right]^2 \right\rangle \right] \quad (V.25)
\end{aligned}$$

Den Term in eckigen Klammern kann man teilweise ausmultiplizieren und erhält:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) + \phi\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 \\
 &= \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 + \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 \\
 &\quad - 2 \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right] \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]
 \end{aligned} \tag{V.26}$$

Die beiden ersten Quadrate mit eckigen Klammern ergeben bei einer Mittelung gerade die Phasen-Strukturfunktion bei der Frequenz  $|\lambda\bar{s}|$ . Um den gemischten dritten Term umzuformen, muss man ihn ausmultiplizieren. Die sich dann ergebenden Produkte zweier Phasen lassen sich als gemischte Terme von Quadraten von Differenzen der optischen Phase schreiben. Die zugehörigen einfachen Quadrate heben sich gegenseitig weg. Man kann daher (V.26) vollständig in Form von Quadraten von Phasendifferenzen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) + \phi\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 \\
 &= \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 + \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 + \\
 &\quad + \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 + \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 - \\
 &\quad - \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 - \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{V.27}$$

Wir können nun die Mittelwertbildung durchführen und alle Quadrate mit Hilfe der Phasen-Strukturfunktion ausdrücken:

$$\left\langle \left[ \phi\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) - \phi\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) + \phi\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}, t\right) \right]^2 \right\rangle = \quad (\text{V.28})$$

$$= 2D_\phi(\lambda\bar{s}) + 2D_\phi(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1) - D_\phi(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 + \lambda\bar{s}) - D_\phi(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 - \lambda\bar{s})$$

Einsetzen von (V.28) in (V.24) ergibt schließlich:

$$STF(\bar{s}) = \iiint \mathcal{W}\left(\bar{\sigma}_1 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}\right) \mathcal{W}^*\left(\bar{\sigma}_1 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}\right) \mathcal{W}\left(\bar{\sigma}_2 - \frac{\lambda\bar{s}}{2}\right) \mathcal{W}^*\left(\bar{\sigma}_2 + \frac{\lambda\bar{s}}{2}\right) \quad (\text{V.29})$$

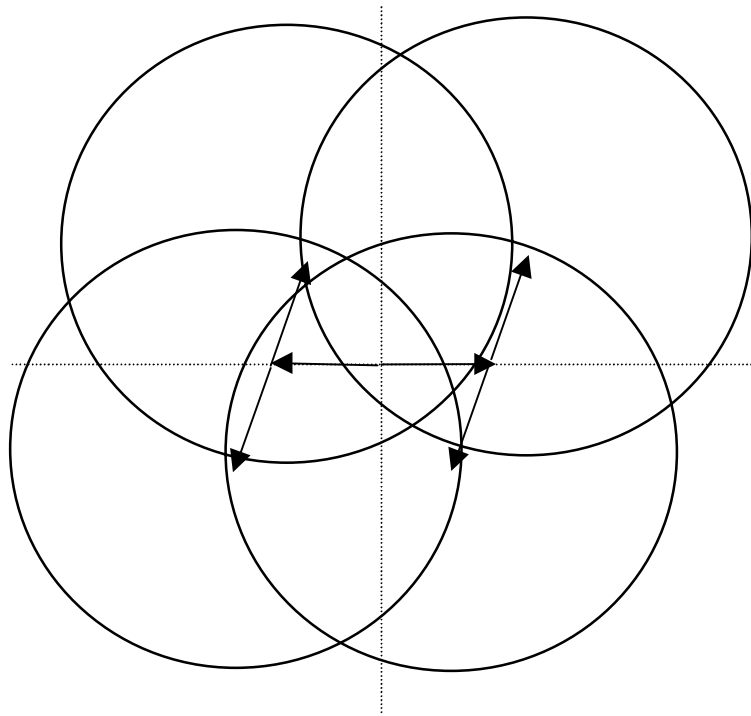
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[2D_\phi(\lambda\bar{s}) + 2D_\phi(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1) - D_\phi(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 + \lambda\bar{s}) - D_\phi(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 - \lambda\bar{s})\right]\right\} d\bar{\sigma}_1 d\bar{\sigma}_2$$

Man erkennt, daß der Exponentialterm in (V.29) nur von der Differenz  $\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1$  abhängt. Durch eine Variablensubstitution können wir den Exponentialterm aus einem Doppelintegral herausziehen. Wir setzen  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2$ ,  $\bar{\delta} = \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2$  und erhalten

$$STF(\bar{s}) = \iiint \mathcal{W}\left(\frac{\bar{\sigma} + \bar{\delta} - \lambda\bar{s}}{2}\right) \mathcal{W}^*\left(\frac{\bar{\sigma} + \bar{\delta} + \lambda\bar{s}}{2}\right) \mathcal{W}\left(\frac{\bar{\sigma} - \bar{\delta} - \lambda\bar{s}}{2}\right) \mathcal{W}^*\left(\frac{\bar{\sigma} - \bar{\delta} + \lambda\bar{s}}{2}\right) d\bar{\sigma} \quad (\text{V.30})$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[2D_\phi(\lambda\bar{s}) + 2D_\phi(\bar{\delta}) - D_\phi(\bar{\delta} + \lambda\bar{s}) - D_\phi(\bar{\delta} - \lambda\bar{s})\right]\right\} d\bar{\delta}$$

Diese Form der STF ist 1974 von **D. Korff** hergeleitet worden. Durch Einsetzen von (IV.22) für die Phasen-Strukturfunktion kann man (V.30) numerisch lösen. Man kann sich die Form der STF durch folgende Überlegungen veranschaulichen.



**Abbildung 5-6:** Geometriefaktor in Gl. (V.30).

ven Flächenfaktor  $\left(\frac{r_0}{D}\right)^2$  bestimmt. Für Frequenzen unterhalb der Seeinggrenze ist der Beitrag der STF größer. Ein einfaches Modell der STF ist gegeben mit:

$$STF(\vec{s}) \approx S^2_{LE}(\vec{s}) + \beta \left(\frac{r_0}{D}\right)^2 S_0(\vec{s}) \quad (\text{V.31})$$

Die Konstante  $\beta$  beträgt 0.342.

Das innere Integral über die Produkte der Pupillen-Transmissionssterme entspricht - für den Fall einer kreisförmigen Apertur - der gemeinsamen Fläche von vier Kreisen. Dies ist bei aberrationsfreiem Teleskop ein rein geometrischer Faktor.

Der Exponentialterm führt nur dann zu einem Beitrag, wenn das gesamte Argument vom Betrag her klein ist. Die Summe der Strukturfunktionsterme wird nie negativ. Sie wird für beliebige Frequenzen  $\lambda\vec{s}$  nur dann insgesamt klein, wenn  $\vec{\delta}$  vom Betrag her klein wird. Dann ist der zweite Summand sowieso klein, und der erste Summand wird von den letzten beiden Termen näherungsweise aufgehoben. Die Grenzen für den Betrag von  $\vec{\delta}$  sind durch den Fried-Parameter  $r_0$  gegeben.

Die Kombination von geometrischen und Exponentialterm zu den Integralen führen dazu, dass für Frequenzen oberhalb der Seeinggrenze  $\lambda\vec{s} > r_0$  nur ein endlicher Beitrag aus einer Fläche von der Größe des Fried-Parameters aus der gesamten Pupille resultiert. Der Wert der STF relativ zu der beugungsbegrenzten OTF ist vom relati-

Es ist der zweite Term in (V.31), welcher die hochaufgelöste Information beinhaltet. Typische Werte für  $\left(\frac{r_0}{D}\right)^2$  sind 0.01 ... 0.001, daher ist die hochaufgelöste Information stark gedämpft. Wegen der Abhängigkeit vom Fried-Parameter muss die STF kalibriert werden. Bei der nachtbeobachtung reicht die zeitnahe beobachtung eines hellen, unaufgelösten Sterns; für die Sonnenbeobachtung muss man auf Autokalibrationsmethoden zurückgreifen.

Kennt man die STF, so kann man durch Inversion von (V.24) den Betragsquadrat der Objekt-Transformierten bestimmen:

$$|\tilde{I}_0(\vec{s})|^2 = \frac{\langle |\tilde{I}(\vec{s})|^2 \rangle}{STF(\vec{s})} \quad (\text{V.32})$$

Diese Inversion ist relativ robust, da sich zeigen läßt, dass die STF für alle Frequenzen innerhalb der Beugungsgrenze nicht verschwindet. In der Praxis ist man durch das Rauschen der Messungen begrenzt.

Mit dem Betragsquadrat der Objekt-Transformierten verfügt man **nicht** über die vollständige Information, um ein Bild der Quelle zu erzeugen. Dies war die Motivation für die Entwicklung des Knox-Thompson - Verfahrens. Das Kreuzprodukt des Objektes  $\tilde{I}_0(\vec{s})\tilde{I}_0^*(\vec{s}-\vec{\Delta})$  ist i. a. eine **komplexwertige Größe**, die von der komplexen Phase der Objekttransformierten abhängt. Die Leistung von Knox und Thompson bestand in der Erkenntnis, dass die dazugehörige Transferfunktion  $\langle S(\vec{s}, t)S^*(\vec{s}-\vec{\Delta}, t) \rangle$  im Mittel **reelwertig** für alle Frequenzen ist. Damit lassen sich aus (V.20) Informationen über die Phase der Objekttransformierten  $\tilde{I}_0(\vec{s})$  gewinnen.

Die Kreuzspektrum-Transferfunktion

$$CTF(\vec{s}, \vec{\Delta}) = \langle S(\vec{s}, t)S^*(\vec{s}-\vec{\Delta}, t) \rangle \quad (\text{V.33})$$

kann man völlig analog zu der STF berechnen, man erhält ein Ergebnis ähnlich wie (V.30), welches für einige Frequenzen die Differenz  $\vec{\Delta}$  zusätzlich enthält. Für  $\vec{\Delta} = \vec{0}$  wird (V.30) reproduziert. Auch für die CTF gibt es eine Näherung wie (V.31):

$$CTF(\vec{s}, \vec{\Delta}) \approx S_{LE}(\vec{s})S_{LE}(\vec{s} - \vec{\Delta}) + \beta \left( \left| \vec{\Delta} \right| \frac{\lambda}{r_0} \right) \left( \frac{r_0}{D} \right)^2 S_0(\vec{s}) \quad (\text{V.34})$$

Der Hauptunterschied zu (V.31) ist, dass  $\beta$  nunmehr von  $\vec{\Delta}$  abhängt; für  $|\vec{\Delta}| \geq \lambda/r_0$  verschwindet der Faktor. Dies bedeutet, dass die Wahl für die Frequenz-Verschiebung  $\vec{\Delta}$  durch das Seeing begrenzt ist, das Signal verschwindet für Verschiebungen, die die Seeing-Grenze deutlich übersteigen. Anders ausgedrückt, die Fluktuationen in der Phase der momentanen Übertragungsfunktion sind nur über Frequenzbereiche von der Größenordnung  $r_0/\lambda$  korreliert. Diese Korrelation macht man sich beim KT-Verfahren zunutze.

### 5.3.3.3 Rekonstruktion der Objektphase mit dem Knox-Thompson - Verfahren

Das Kreuzspektrum (V.20) bildet die Differenz der Objektphase über den Vektor  $\vec{\Delta}$ :

$$\tilde{I}_0(\vec{s})\tilde{I}_0^*(\vec{s} - \vec{\Delta}) = |\tilde{I}_0(\vec{s})||\tilde{I}_0(\vec{s} - \vec{\Delta})| \exp j [\psi(\vec{s}) - \psi(\vec{s} - \vec{\Delta})] \quad (\text{V.35})$$

Ist  $\vec{\Delta}$  genügend klein, so erhält man eine Approximation des Gradienten der Objektphase  $\psi$  in Richtung von  $\vec{\Delta}$ . Um das KT-Verfahren anzuwenden, bildet man  $K$  Gradienten,  $\vec{\Delta}_k$ ,  $k=1, \dots, K$ , in verschiedene Richtungen und mit verschiedenen Beträgen, solange  $|\vec{\Delta}_k| \leq \lambda/r_0$  gewährleistet ist. Aus diesen Gradienten kann man durch Integration über die Frequenz die ursprüngliche Objektphase wiedergewinnen. Da die Frequenzwerte diskret vorliegen, gibt es eine untere Schranke für den Betrag der Frequenzverschiebungen. Diese entspricht dem Kehrwert der beobachteten Gesichtsfeldgröße.

### 5.3.4 Polyspektren 3. Ordnung: Triple-Korrelations - Verfahren (Speckle Masking)

Das Triple-Korrelationsverfahren für die astronomische Speckleinterferometrie ist 1977 unter dem Namen "**speckle masking**" von Weigelt vorgeschlagen und von Weigelt, Wirnitzer und Lohmann Anfang der Achtziger weiterentwickelt worden. Es stellt heute das mächtigste und anspruchsvollste Verfahren der astronomischen Speckleinterferometrie dar.

Das Polyspektrum 3. Ordnung

$$P^{2,1}(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_1 + \vec{s}_2) = \langle \tilde{I}(\vec{s}_1) \tilde{I}(\vec{s}_2) \tilde{I}^*(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \rangle = \tilde{I}_0(\vec{s}_1) \tilde{I}_0(\vec{s}_2) \tilde{I}_0^*(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \langle S(\vec{s}_1) S(\vec{s}_2) S^*(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \rangle \quad (\text{V.36})$$

heißt **Bispektrum**. Wegen der Abhängigkeit  $\vec{t}_1 = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$  ist das Bispektrum nicht sechsdimensional (wie es ein Polyspektrum 3. Ordnung einer zweidimensionalen Größe wäre), sondern "nur" vierdimensional. Die (vierdimensionale) Fourier-Transformierte des Bispektrums heißt **Triple-Korrelation** der Bildintensität.

Die Mächtigkeit des Speckle-Masking-Verfahrens resultiert von zwei Eigenschaften:

- Es werden simultan sehr viele Korrelationen zwischen beobachteten Fouriertermen gebildet, in welchen die Objektphase hochredundant verschlüsselt ist.
- Analysiert man die **bispektrale Transferfunktion**

$$BTF(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \langle S(\vec{s}_1) S(\vec{s}_2) S^*(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \rangle, \quad (\text{V.37})$$

so stellt man fest, dass die Störungen der optischen Phase in der Teleskoppupille  $\phi(\vec{r})$  ausschliesslich in Form von Phasenschlußbeziehungen vorliegen. Das Bispektrum minimiert daher automatisch die Varianz des durch Phasenfehler. Damit ist auch die BTF eine reellwertige Funktion.

Wegen letzterer Eigenschaft ist das Bispektrum unempfindlich gegenüber der Bildposition.

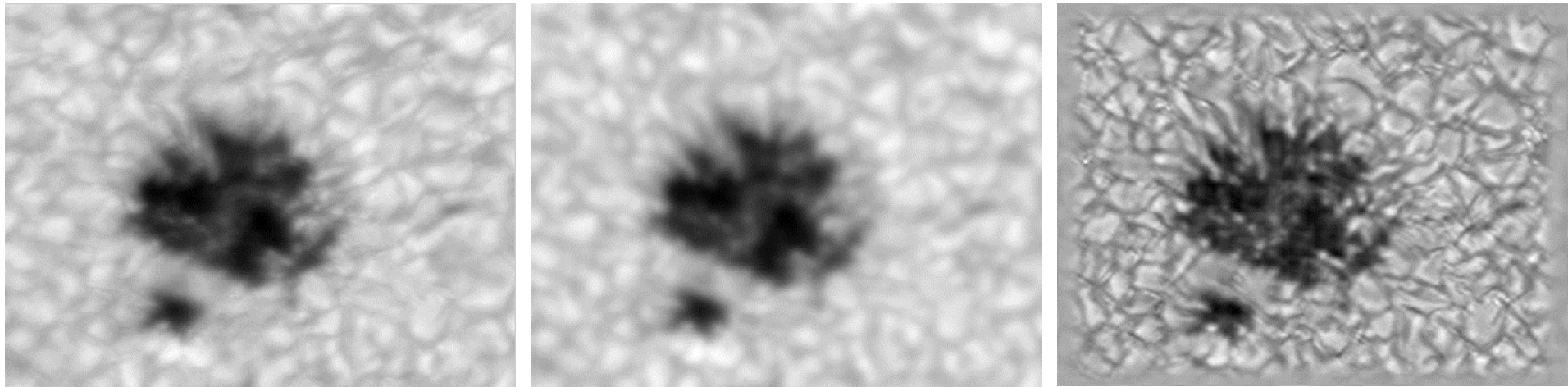
Es gibt eine Reihe von Methoden, die Objektinformation aus einem gemittelten Bispektrum zu extrahieren. Einfache iterative Verfahren entwickeln die Objektphase  $\psi(\vec{s})$  rekursiv aus der beobachteten Phase  $\Psi(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$  des Bispektrums:

$$\psi(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) = \psi(\vec{s}_1) + \psi(\vec{s}_2) + \Psi(\vec{s}_1, \vec{s}_2). \quad (\text{V.38})$$

Weiter entwickelte Verfahren lösen für die Objektphase durch eine optimale Anpassung an die Phase des Bispektrums im Sinne der kleinsten quadratischen Fehler (*iterative least squares bispectrum fitting*) oder aufgrund von Modellen der Quelle (*"Bauklötzchenmethode"*).

### 5.3.5 Beispiele für die Speckle-Interferometrie

#### 5.3.5.1 Knox-Thompson - Verfahren bei der Sonnenbeobachtung



#### 5.3.5.2 Speckle Masking eines Doppelsterns (MPI f. Radioastronomie)

