

Einführung in die Astronomie und Astrophysik I

- 17.10. Einführung: Überblick & Geschichte (H.B.)
- 24.10. Sternpositionen, Koordinaten, Zeitmessung (C.F.)
- 31.10. Teleskope und Instrumentierung (H.B.)
- 07.11. Strahlung, Strahlungstransport (C.F.)
- 14.11. Planetensystem(e) & Keplergesetze (H.B.)
- 21.11. Sterne, Typen / Klassifikation, HR-Diagramm (C.F.)
- 28.11. Interstellare Materie: Chemie & Matriekreislauf (H.B.)
- 05.12. Sternentstehung, Akkretionsscheiben & Jets (H.B.)
- 12.12. Sternaufbau & -entwicklung I: Parameter, Hauptreihe (C.F.)**
- 19.12. Sternaufbau & -entwicklung II: Energieerzeugung, Endstadien (C.F.)
- - - Weihnachtspause
- 09.01. Mehrfachsysteme & Sternhaufen, Dynamik (C.F.)
- 16.01. Exoplaneten & Astrobiologie (H.B.)
- 23.01. Die Milchstraße (H.B.)
- 30.01. Zusammenfassung (C.F. & H.B.)
- 08.02. (Samstag) Prüfung: 15:00 - 17:00, INF 227**

Einführung in die Astronomie und Astrophysik I

Wiederholung: Sternklassifikation, HR-Diagramm

9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

9.1. Weitere Sternparameter

9.2. Sonne

9.3. Sternaufbau

9.4. Energietransport

6.2. Sternklassifikation

Leuchtkraft des Sterns (Definition):

$$L = 4 \pi R^2 F$$

-> F ist ausgestrahlte Energie pro Fläche

Für Schwarzkörper: Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$F = \sigma_{SB} T^4 \quad \sigma_{SB} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$$

Aber: Sterne sind keine schwarzen Körper!!

-> Definition einer

“Effektivtemperatur”:

$$T_{eff} = \left(\frac{L}{\sigma_{SB} 4 \pi R^2} \right)^{1/4}$$

Effektivtemperatur keine echte Temperatur, sondern quantifiziert Energieausstrahlung / Fläche

Dennoch: T_{eff} ist typische Temperatur der Sternatmosphäre

-> T_{eff} ist der wichtigste Sternparameter, der aus der Analyse des Sternlichts gewonnen werden kann ...

6.2. Sternklassifikation

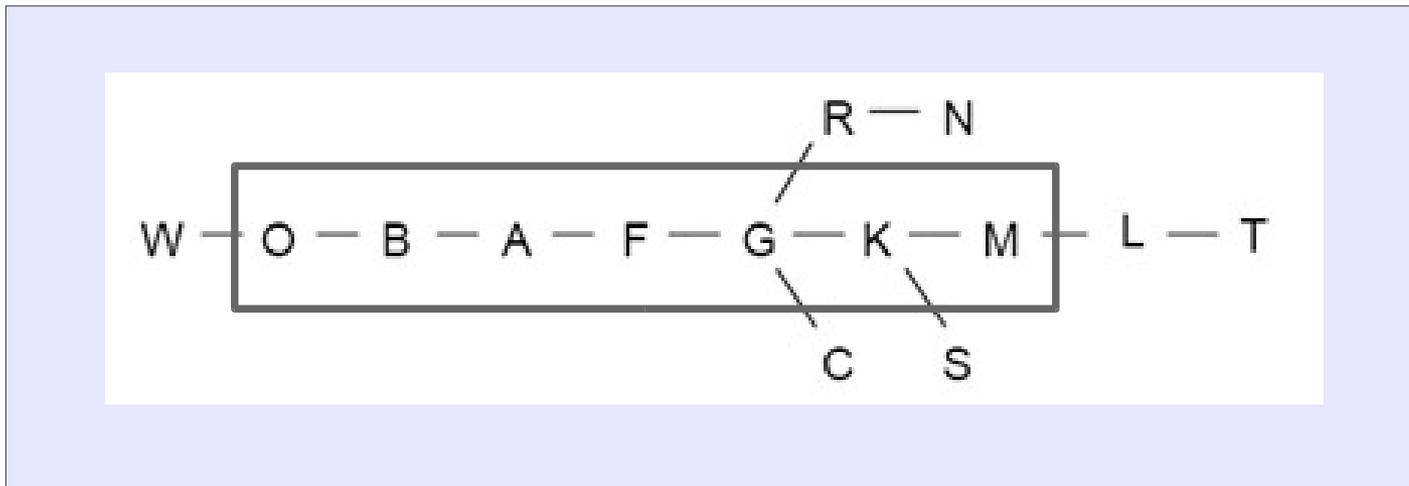
Spektral-Klassifikation

nach Edward **Pickering** (1846-1919), Wilhelmina **Fleming** (1857-1911)
& Annie **Cannon** (1863-1941)

-> **Harvard-Klassifikation von Sternspektren:**

ein-dimensionale Sequenz von **Spektren**,
korreliert mit **Sternfarbe, Farb-Index**, also **Temperatur**

Basis des **Henry-Draper Catalog** (1880-1925):
Untersuchung von 225.000 Sternen



6.2. Sternklassifikation

Spektral-Klassifikation

-> Spektraltyp SpT, absolute visuelle Magnitude, Farbindex, Effektiv-Temperatur, Farb-Temperatur, Bolometrische Korrektur, bolometrische Magnitude typischer Sterne

SpT	M_V	B-V	U-B	T_{eff}	T_c	B.C.	M_{Bol}
O5	-6	-0.45	-1.2	35 000	70 000	4.6	-10.6
B0	-3.7	-0.31	-1.07	21 000	38 000	3.0	-6.7
B5	-0.9	-0.17	-0.56	13 500	23 000	1.6	-2.5
A0	+0.7	0.00	0.00	9 700	15 400	0.68	0.0
A5	+2.0	+0.16	+0.09	8 100	11 100	0.30	+1.7
F0	+2.8	+0.30	+0.02	7 200	9 000	0.10	+2.7
F5	+3.8	+0.45	-0.01	6 500	7 600	0.00	+3.8
G0	+4.6	+0.57	+0.04	6 000	6 700	0.03	+4.6
G5	+5.2	+0.70	+0.20	5 400	6 000	0.10	+5.1
K0	+6.0	+0.84	+0.46	4 700	5 400	0.20	+5.8
K5	+7.4	+1.11	+1.06	4 000	4 500	0.58	+6.8
M0	+8.9	+1.39	+1.24	3 300	3 800	1.20	+7.6
M5	+12.0	+1.61	+1.19	2 600	3 000	2.1	+9.8

(Aus: Scheffler/Elsässer Physik der Sterne und der Sonne)

6.2. Sternklassifikation

Leuchtkraftklasse:

Sterne gleicher Spektralklasse (Sp) können verschiedene Leuchtkraft haben

-> **Leuchtkraftklasse (LC)**

-> MK-Klassifikation (Morgan & Keenan)

-> Grund: Radius der Sterne:

$$L = 4 \pi R^2 F$$

$$F = \sigma_{SB} T^4$$

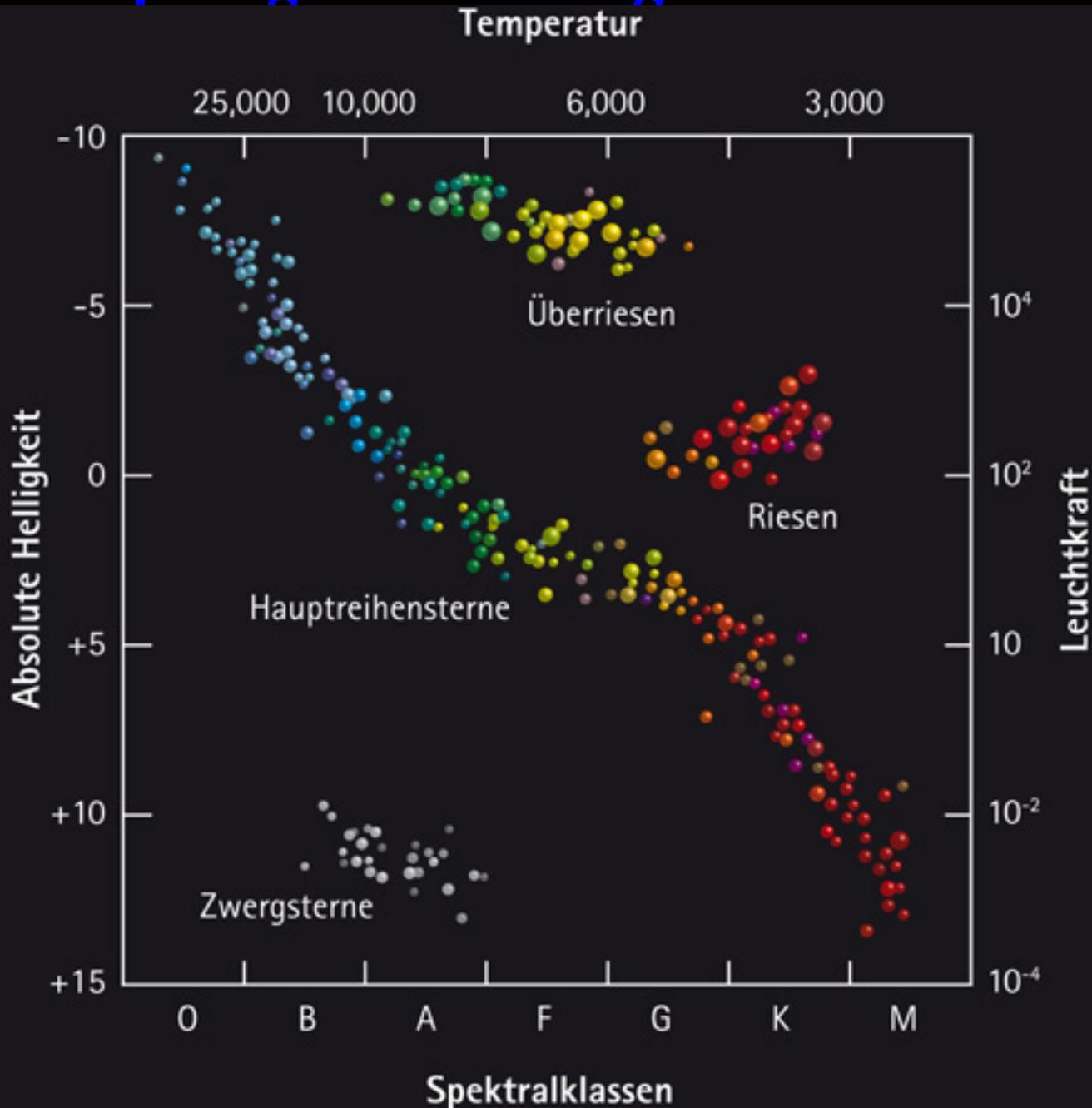
Klassen: I = Überriesen, II = helle Riesen, III = Riesen,
IV = Unterriesen, V = Zwergsterne, VI = Unterzwerge

Tab. 3.5.3. Die MK – Leuchtkraftklassen [Kaler, 1994]

(* selten)

MK - Klasse	Beschreibung	Absolute Helligkeit		
		B0	F0	M0
0 (null)	Die allerhellsten Überriesen in den Mangellanschen Wolken* und der Milchstrasse		-9	
Ia	helle Überriesen	-6,7	-8,2	-7,5
Ib	weniger helle Überriesen	-6,1	-4,7	-4,6
II	helle Riesen	-5,4	-2,3	-2,3
III	normale Riesen	-5,0	1,2	-0,4
IV	Unterriesen	-4,7	2,0	
V	Hauptreihe	-4,1	2,6	9,0
Sd (VI*)	Unterzwerge			10
D, wd (VII*)	Weisse Zwerge	10,2	12,9	

6.3. Hertzsprung-Russell-Diagramm



9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

9.1 Weitere Sternparameter

- > Sternradius
- > Massenbestimmung, Doppelsterne
- > Masse-Leuchtkraft-Beziehung
- > Chemische Häufigkeit, “Metallizität”

nicht: Alter, Rotation, Multiplizität, ...

9.1. Weitere Sternparameter

Sternradius: aus Leuchtkraft und Effektivtemperatur:

$$L = 4 \pi R^2 F = 4 \pi R^2 \sigma_{SB} T_{eff}^4$$

Im Verhältnis zur Sonne:

$$\log \frac{L}{L_o} = 2 \log \frac{R}{R_o} + 4 \log \frac{T_{eff}}{T_{eff,o}}$$

Linien konstanten Radius im HRD sind gerade Linien im $(\log L) - (\log T_{eff})$ - Diagramm

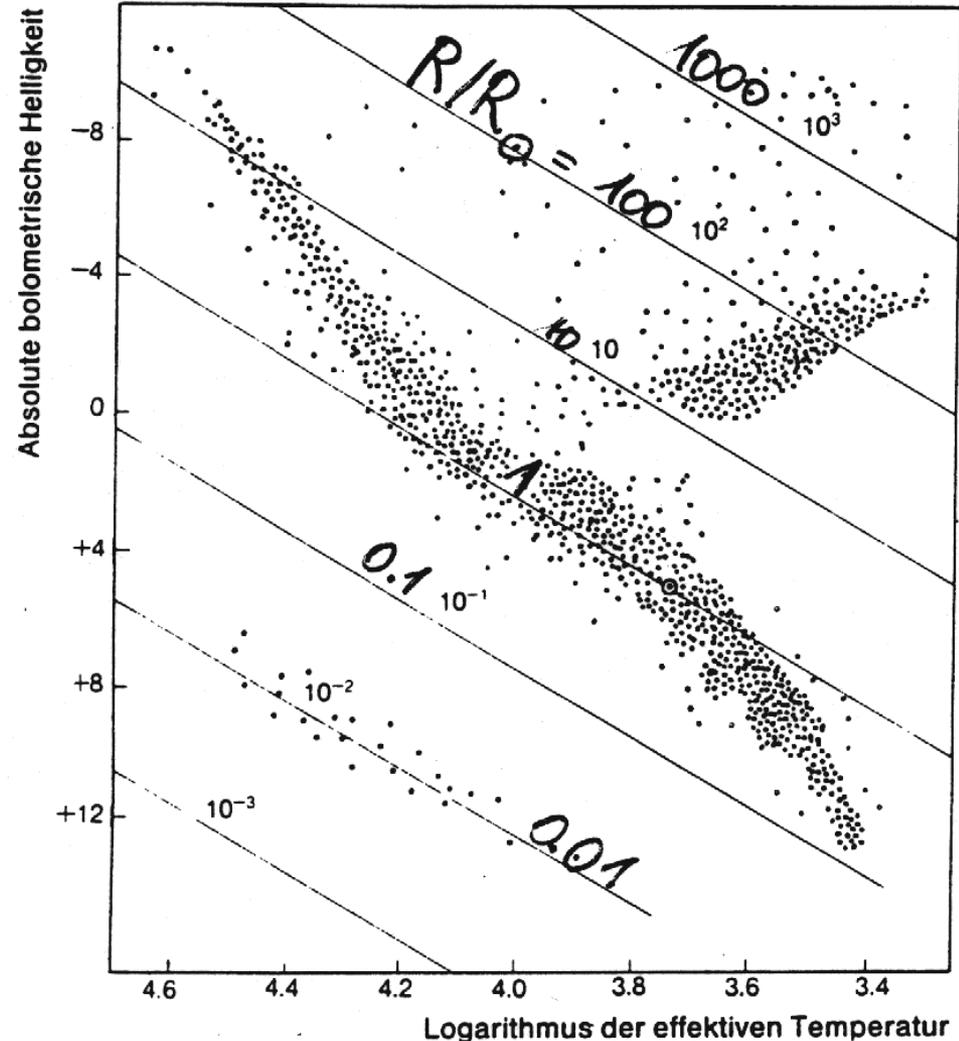
Übrigens:

Auch Umkehrschluß möglich:

"spektroskopische Parallaxe"

Spektraltyp, Leuchtkraft aus CMD:

-> Entfernung ("Parallaxe")



9.1. Weitere Sternparameter

Stern-Masse

Stern-Parameter bisher: Leuchtkraft, Effektivtemperatur, Farbe, Radius, (Rotation),
(Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche $\log(g)$, $g = GM/R^2$)

-> **für weiteres Verständnis der Sternphysik
ist die Sternmasse notwendig !!**

Massenbestimmung bei Sternen:

- > Direkte astrometrische Bahnvermessung von **Binärsystemen**
- > Vergleich mit **Modellen zur Sternaufbau** und zur Sternentwicklung
- > Aus empirischer **Massen-Leuchtkraft-Beziehung**

9.1. Weitere Sternparameter

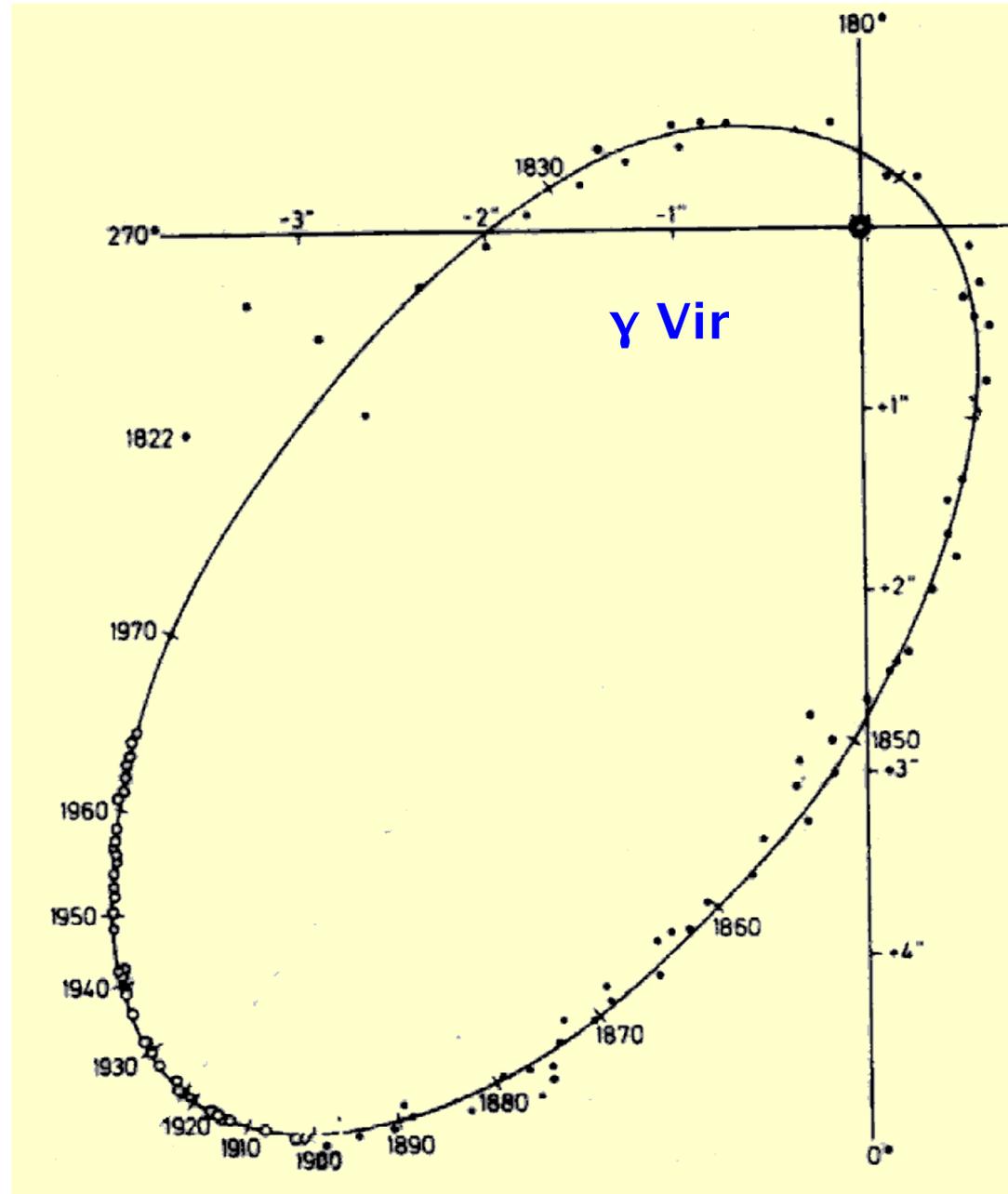
Massenbestimmung in visuellen Doppelsternen:

Beide Komponenten
(getrennt) sichtbar

- große Halbachse a
der relativen wahren Bahn
- bekannte Entfernung
- wahre Bahnhalbachsen
um den Schwerpunkt a_1, a_2
- Umlaufdauer P

-> Kepler-Gesetze

-> Masse



9.1. Weitere Sternparameter

Sterne umlaufen **Massenschwerpunkt** auf elliptischen Bahnen

3. Kepler-Gesetz:

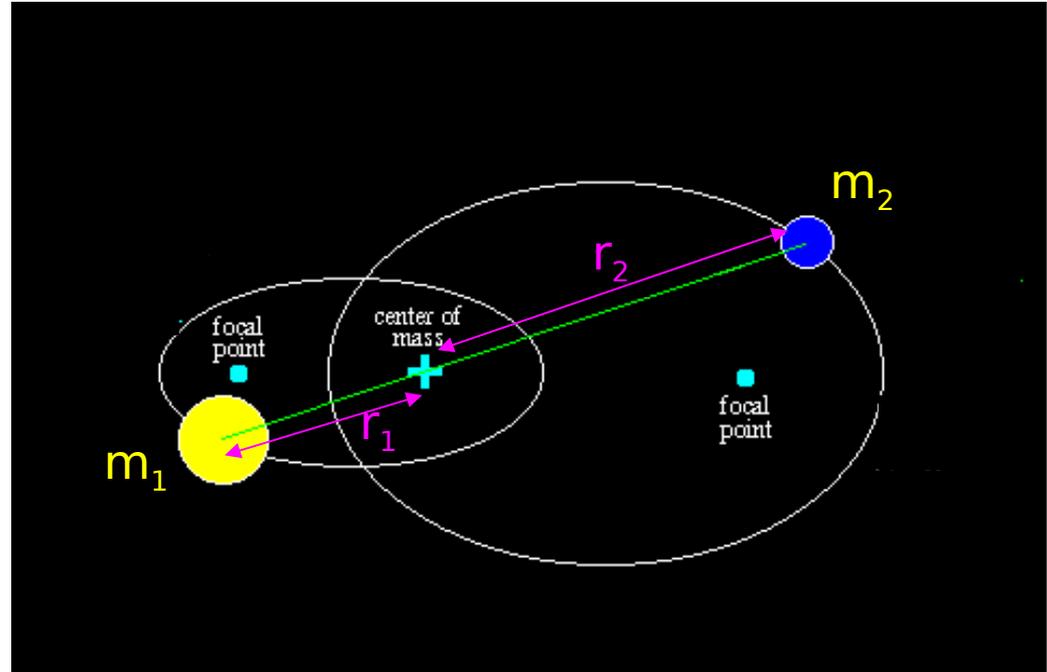
-> Massensummen:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2}$$

Schwerpunktsatz:

-> Einzelmassen aus
absoluten Bahnen:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1}$$



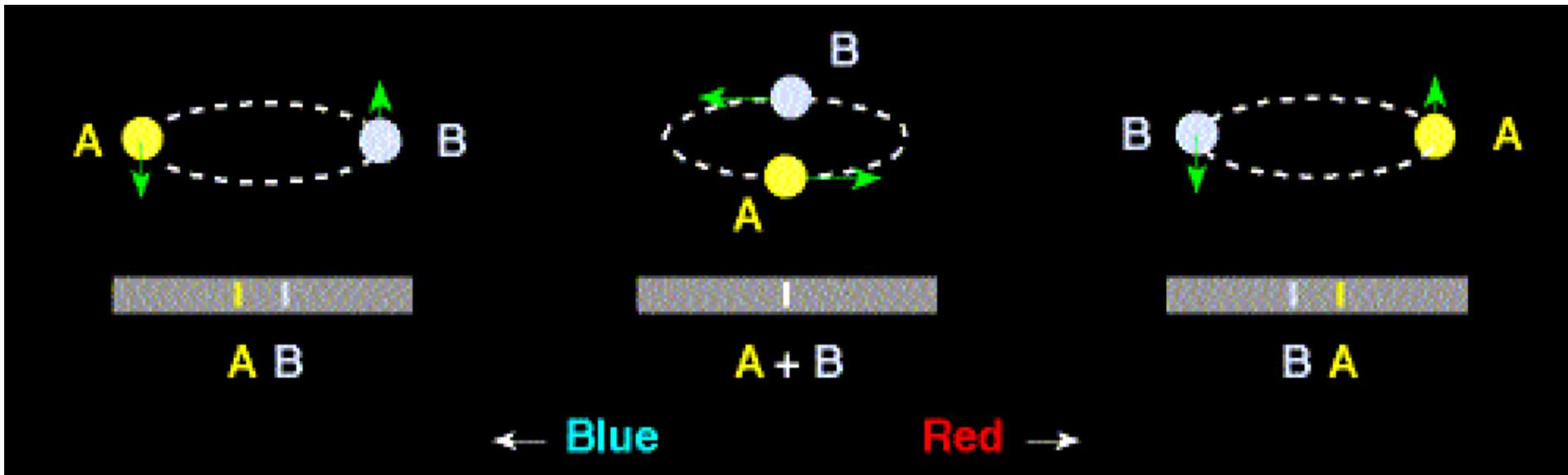
-> **Genaue Massenbestimmung** für beide Sterne möglich wenn:

- 1) Beide Sterne sichtbar: **visueller** Doppelstern
- 2) Winkelgeschwindigkeit hoch genug -> **Bahn** wird beobachtet
- 3) **Entfernung** D bekannt -> $a = \alpha D$
- 4) Bahnebene senkrecht zur Sichtlinie, **Inklination** $i=0$,
(inklinierte Bahnebene -> Appendix)

9.1. Weitere Sternparameter

Spektroskopische Doppelsterne

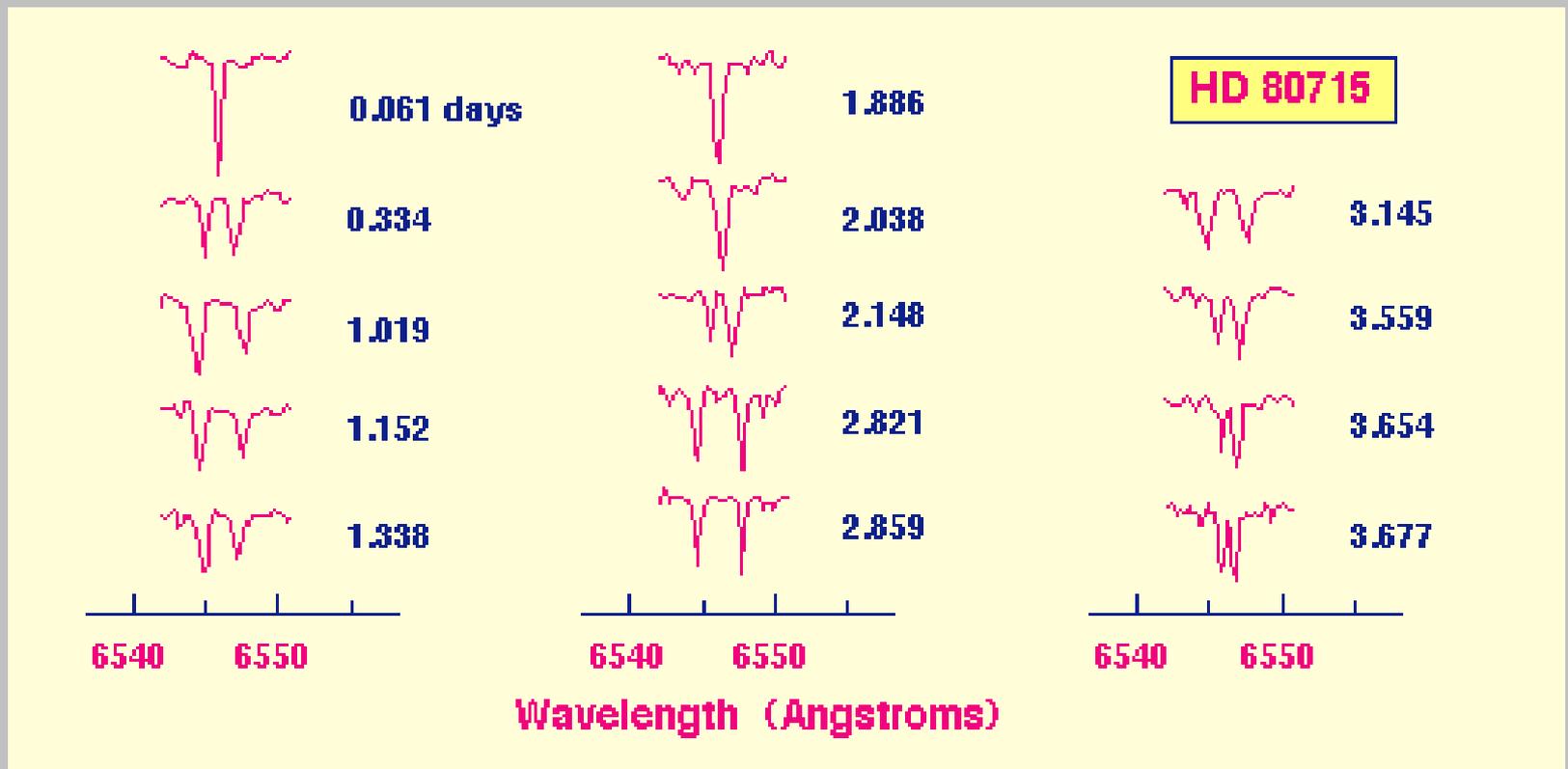
- = Sterne bei denen **Verdopplung der Spektrallinien** beobachtet wird,
-> Periode P , Radialgeschwindigkeit $v(t)$ (Dopplerverschiebung):
- > **Doppelsternsystem**, das räumlich nicht aufgelöst werden kann
 - > **Radialgeschwindigkeit** gibt **Keplergeschwindigkeit** des Sterns (oder der beiden Sterne)



9.1. Weitere Sternparameter

Spektroskopische Doppelsterne

Beispiel HD 80715, $P = 3.677$ d,
Verdopplung der Absorptionslinien sichtbar



9.1. Weitere Sternparameter

Spektroskopische Doppelsterne

- = Sterne bei denen **Verdopplung der Spektrallinien** beobachtet wird,
-> Periode P , Radialgeschwindigkeit $v(t)$ (Dopplerverschiebung):
- > **Doppelsternsystem**, das räumlich nicht aufgelöst werden kann
 - > **Radialgeschwindigkeit** zeigt projizierte **Keplergeschwindigkeit** des Sterns (oder der beiden Sterne)
 - > Berechnung von $a_1 \sin(i)$ bzw. auch $a_2 \sin(i)$

Aus **3. Kepler-Gesetz** folgt:

Massenfunktion:

$$f = \frac{m_2 \sin^3 i}{m_1 + m_2} = \frac{a^3 \sin^3 i}{P^2}$$

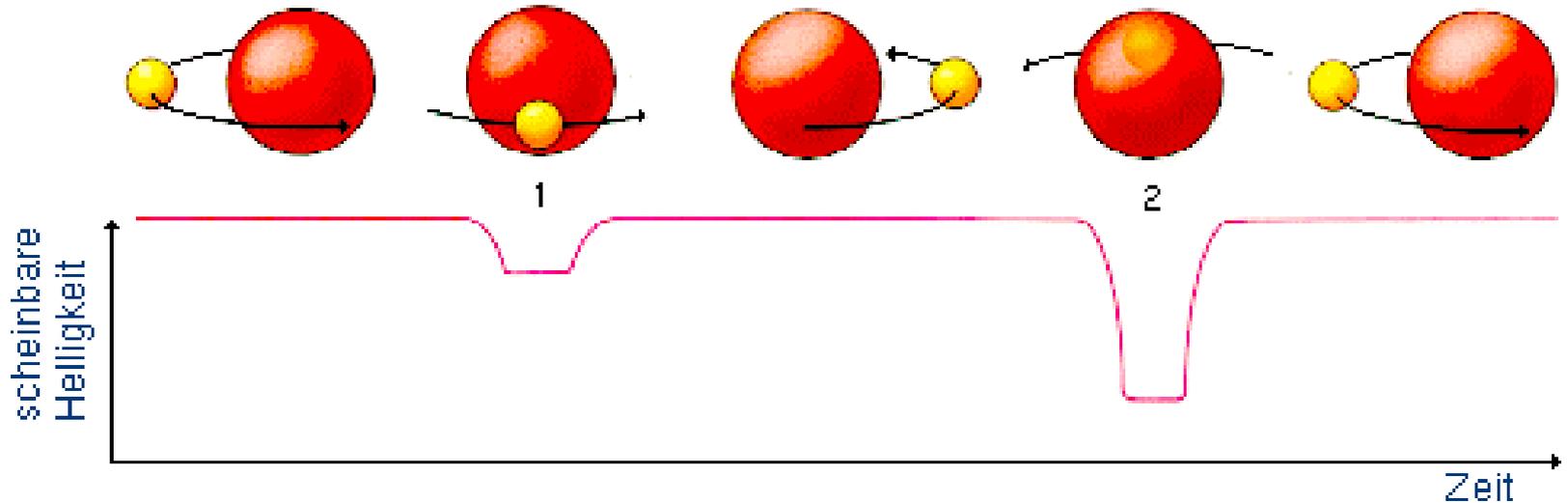
(falls nur ein Stern sichtbar)

Massenverhältnis:

m_1/m_2 kann abgeleitet werden, falls beide Sterne zu sehen sind

9.1. Weitere Sternparameter

Bedeckungs-Doppelsterne



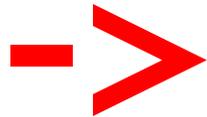
Beobachtungsgrößen:

Umlaufperiode, Flächenverhältnisse der Sterne, Radialgeschwindigkeiten

-> Bei genauester Kenntnis von Lichtkurve und Radialgeschwindigkeiten:
durch **Modellierung** können alle Systemparameter bestimmt werden

-> Sternmassen

9.1. Weitere Sternparameter



Empirische

Masse-Leuchtkraft-

Beziehung

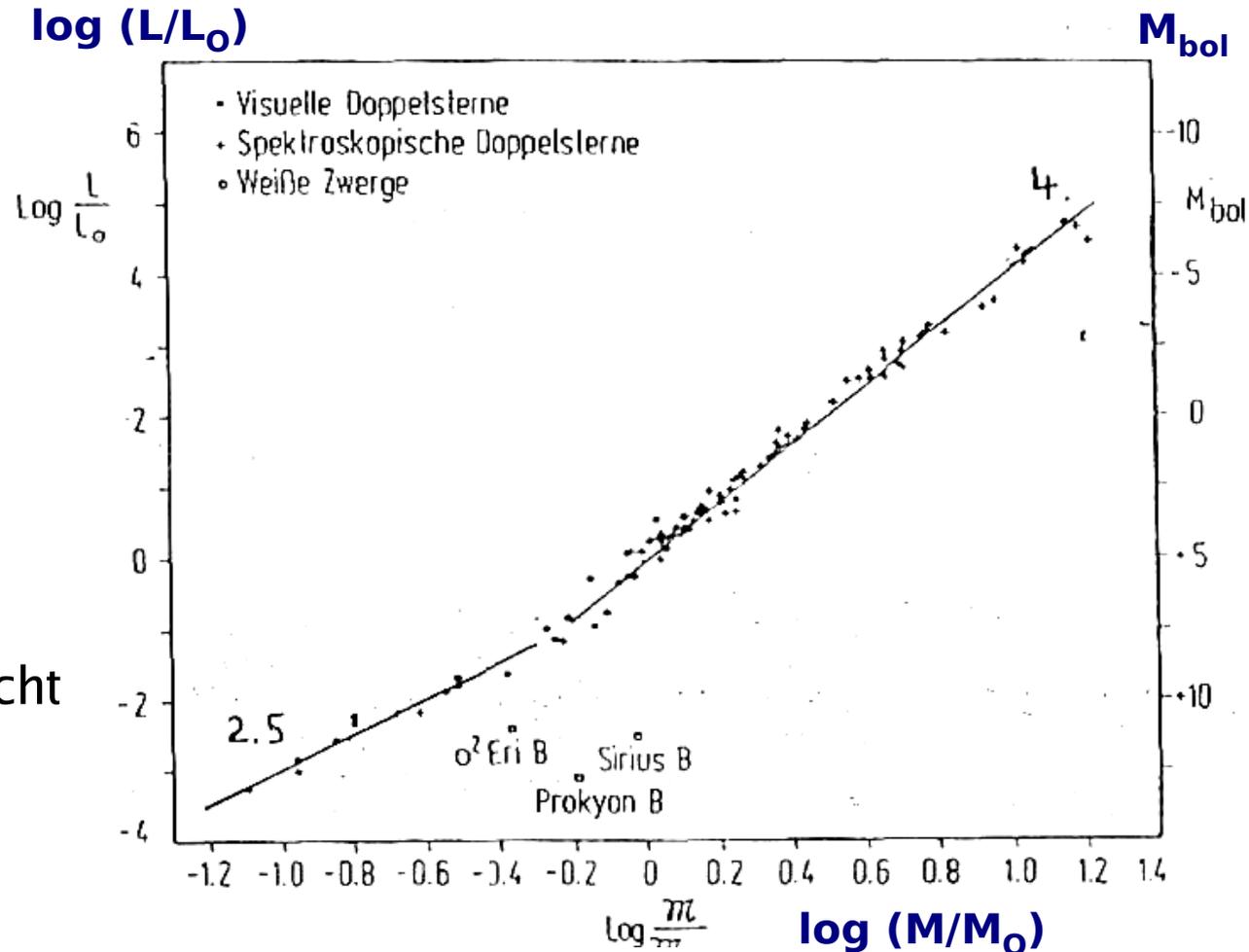
9.1. Weitere Sternparameter

Empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung

Beobachtungsdaten (1980):

Beste Massen-
bestimmungen aus
26 visuellen
Doppelsternen,
93 Bedeckungs-
veränderlichen,
4 spektroskopischen
Doppelsternen

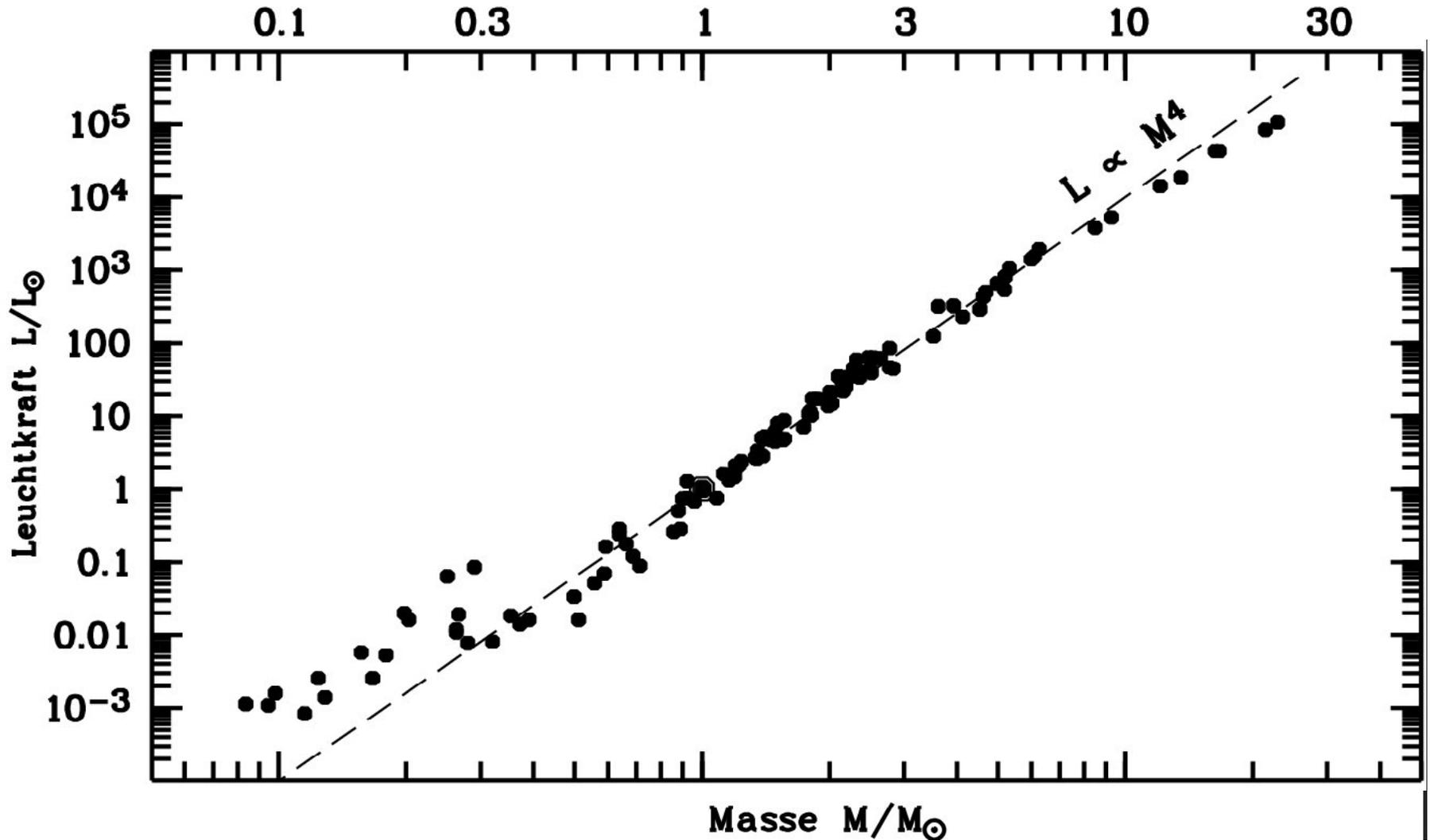
“Weiße Zwerge”
weichen ab, liegen nicht
auf der Hauptreihe



9.1. Weitere Sternparameter

Empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung

Neuere Version:



9.1. Weitere Sternparameter

Empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung

In erster Näherung:

$$L \propto M^3$$

Bessere Approximation:

$$L \propto M^{2.5} \quad \left[M < 1/2 M_{\odot} \right]$$

$$L \propto M^{3.8} \quad \left[M > 1/2 M_{\odot} \right]$$

-> Diese Beziehungen sind durch die Physik der **Sternaufbaus** und der **Sternentwicklung** bestimmt (kommt später...)

-> **Massereichere Sterne “leben” kürzer:**

Übungsaufgabe

-> **Fundamentale Beziehung zum Verständnis der leuchtenden Materie im Universum**

9.1. Weitere Sternparameter

Metallizität Z: Maß für chemische Häufigkeiten

Notation der Astronomen: H, He, Rest = "Metalle", (manchmal C,N,O)

Metallizität = "Metall"gehalt pro Einheitsvolumen

$$Z = \frac{m_Z n_Z}{\sum_i m_i n_i}$$

$i = X, Y, Z$
 m_i = mittlere Masse von H (X), He (Y), "Metall" (Z)
 $m_Z = 16.5$

X,Y,Z werden als Abkürzungen für Massenanteile verwendet

Typisches Anzahlverhältnis: $n_H : n_{He} : n_{Metall} = 1000 : 90 : 1$

Massenverhältnisse:

Typische stellare **Population I** in der Scheibe der Milchstraße:

$$X : Y : Z = 0.73 : 0.25 : 0.02$$

Stellare **Population II**: niedrigere Metallizität (-> ältere Sterne)

Sonnensystem: $X : Y : Z = 0.706 : 0.275 : 0.019$

Lokales interstellares Material: ähnlich

9.1. Weitere Sternparameter

Metallizität in Sternatmosphären:

-> Messung der **Elementhäufigkeiten** aus Linienstärken (“Wachstumskurve”)

Oft Angabe der **Häufigkeiten relativ zum Wert der Sonne:**

Relative Helium-/Wasserstoff-
Häufigkeit (im Vgl. zur Sonne): $[\epsilon_{He}] \equiv \log \frac{(n_{He}/n_H)}{(n_{He}/n_H)_{Sonne}}$

Relative Sauerstoff-/ Eisen-
Häufigkeit (im Vgl. z. Sonne): $[O/Fe] \equiv \log \frac{(n_O/n_{Fe})}{(n_O/n_{Fe})_{Sonne}}$

Beispiele: Metallarmer Stern: $[Fe/H] < -1$
Metallreicher Stern: $[Fe/H] > -1$

“Metalle” sind wichtig für die Stärke
des **Absorptionskoeffizienten**

9.1. Weitere Sternparameter

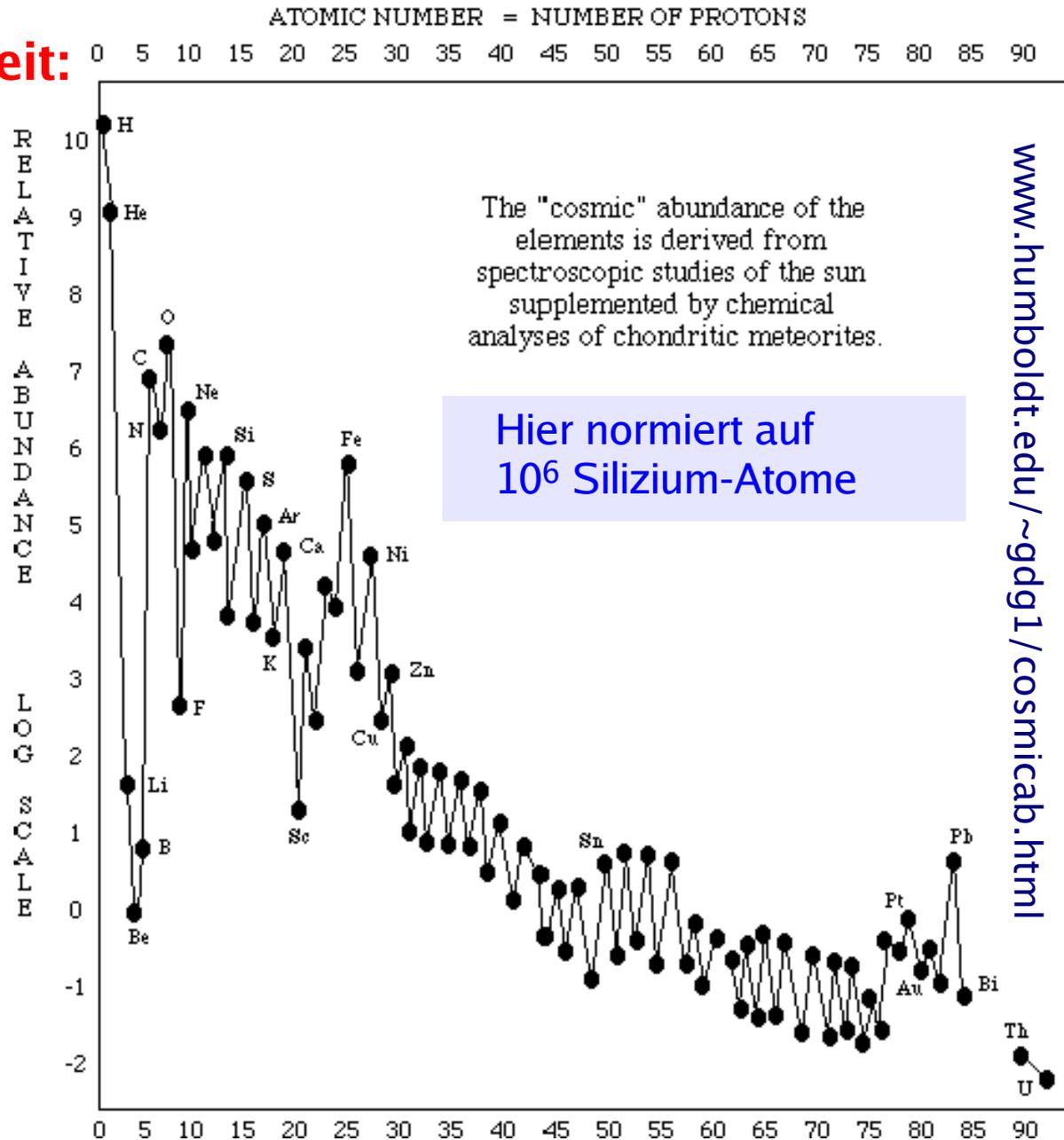
“Kosmische” Häufigkeit:

Verteilung der relativen chemischen Häufigkeiten

“Kosmische” Häufigkeit ist diejenige im Sonnensystem (also nicht die irdische)

Meßgrundlage:

- Sonnenspektroskopie
- Analyse v. Chondriten



9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

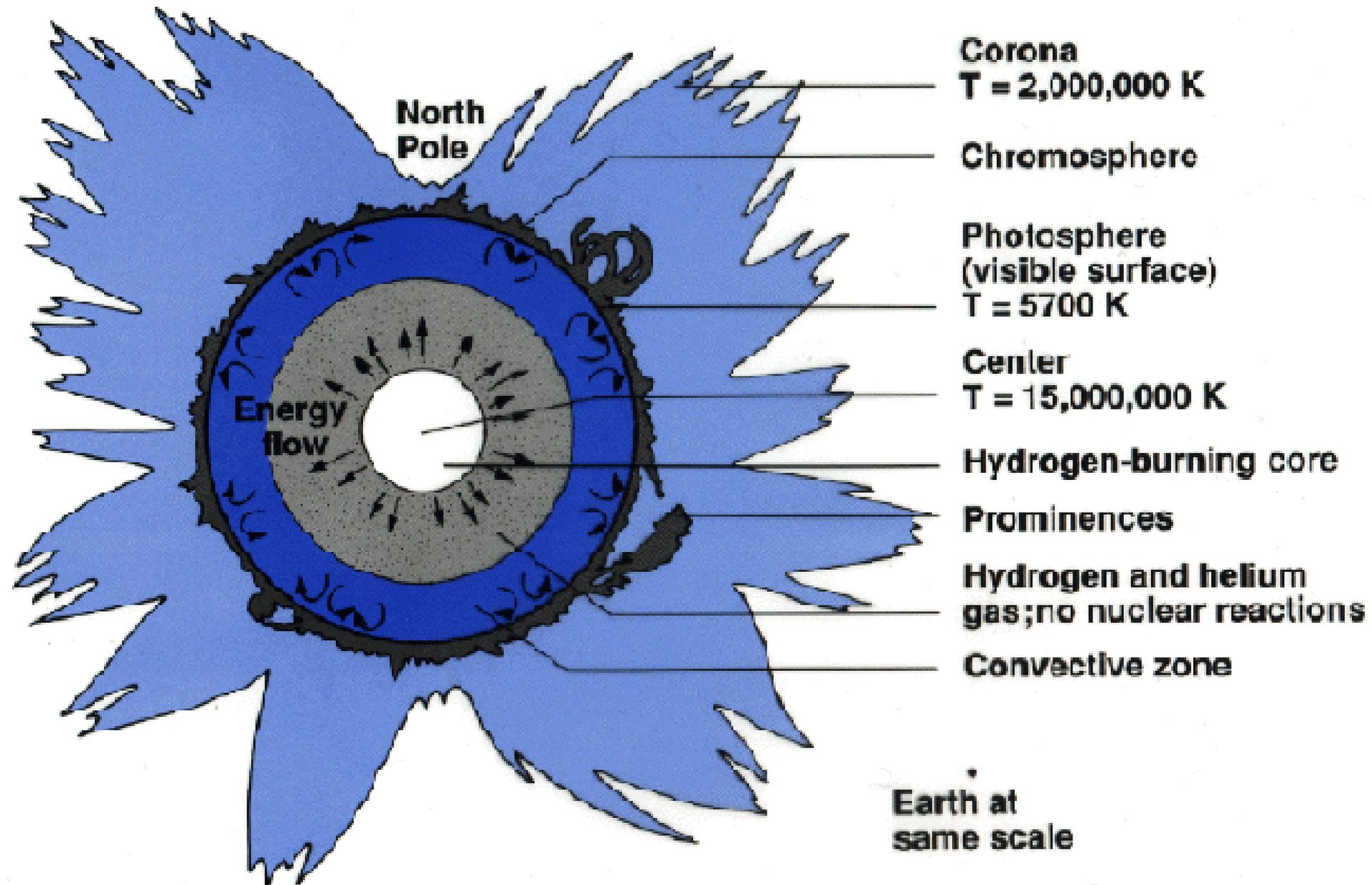
9.2 Die Sonne

- > Daten
- > Innere und äußere Struktur
- > Aktivität
- > Äußerer Aufbau

9.2. Die Sonne

Die Sonne als Stern:	
Durchmesser (Photosphäre)	1 391 980 km
Masse	1.99×10^{33} g
Mittlere Dichte	1.41 g/cm ³
Leuchtkraft	3.83×10^{33} erg/s
Rotationsperiode	25 Tage (Äquator)
Oberflächentemp. (effektiv)	5800 K
Spektralklasse	G2 V
Scheinbare Helligkeit	-26.7 mag
Absolute Helligkeit	4.8 mag
Mittlere Entfernung zur Erde	149 597 892 km = 1 AE

9.2. Die Sonne



9.2. Die Sonne

Aufbau der Sonne:

Korona:

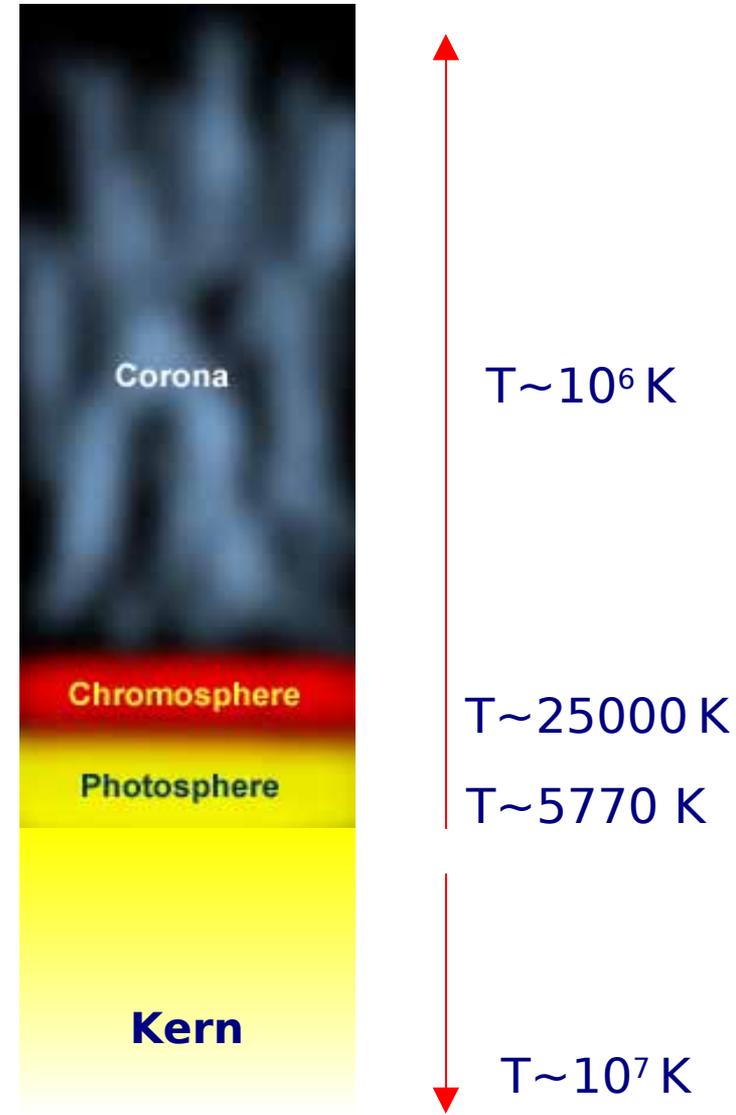
geringe Dichte, Temperatur \sim Mio K,
Quelle des Sonnenwindes

Chromosphäre:

Temperaturschichtung: von 4300 K, bei
500 km Höhe bis 500000 K nahe Korona

Photosphäre:

leuchtkräftige, strahlende obere Schicht,
= **Sonnen-"Oberfläche"** ($\tau \approx 1$), ca. 5800 K,
mehrere 100 km dick, granulierte Struktur
von 1500 km langen Elementen, durch
konvektiven Energietransport



Grund des **Temperaturanstiegs ??** Druckwellen, Alfvénwellen ??

9.2. Die Sonne

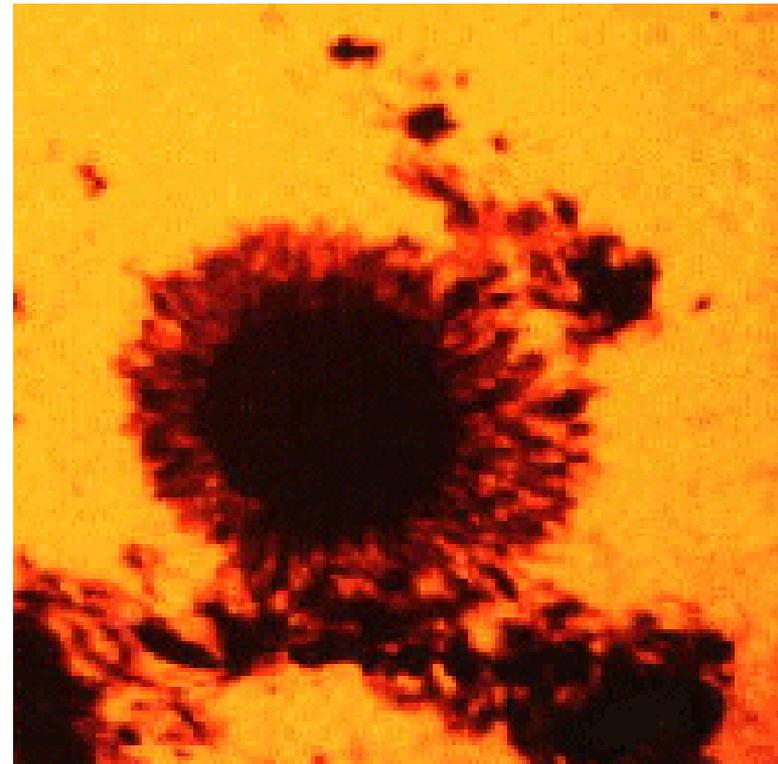
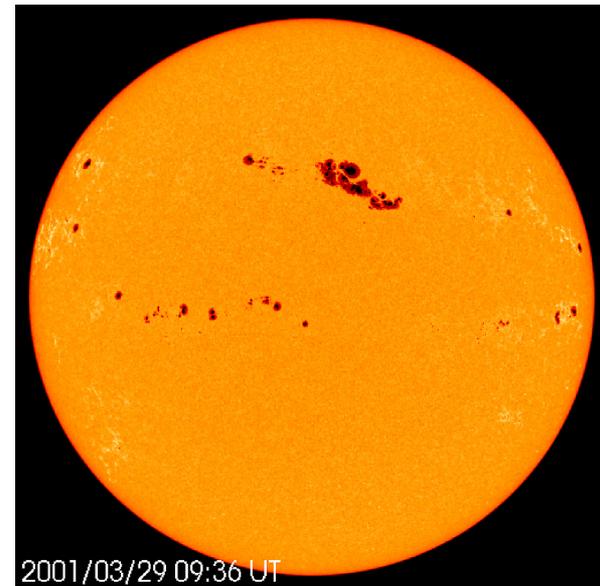
Sonnenflecken

Ältestes bekanntes Phänomen auf
Sonnenoberfläche ~ 50000km Durchmesser:

- > Auftreten in Einzelflecken / Fleckengruppen
- > Dunkles Zentrum: Umbra
Hellere Randgebiete: Penumbra

Sonnenflecken sind Resultat der
magnetischen Sonnenaktivität:

- > Wechselwirkung zwischen
Materie & Magnetfeld (< 4000 G)
- > 11-Jahres-Zyklus in der Polaritäts-
richtung: Hinweise auf 22-Jahres-
zyklus des **Sonnendynamos**



9.2. Die Sonne

Sonnenflecken

Flecken sind kälter als Umgebung

- > dunkler
- > Fleck < 4000K, Photosphäre ~5800 K
- > bipolare Anordnung

Magnetische Flußröhren

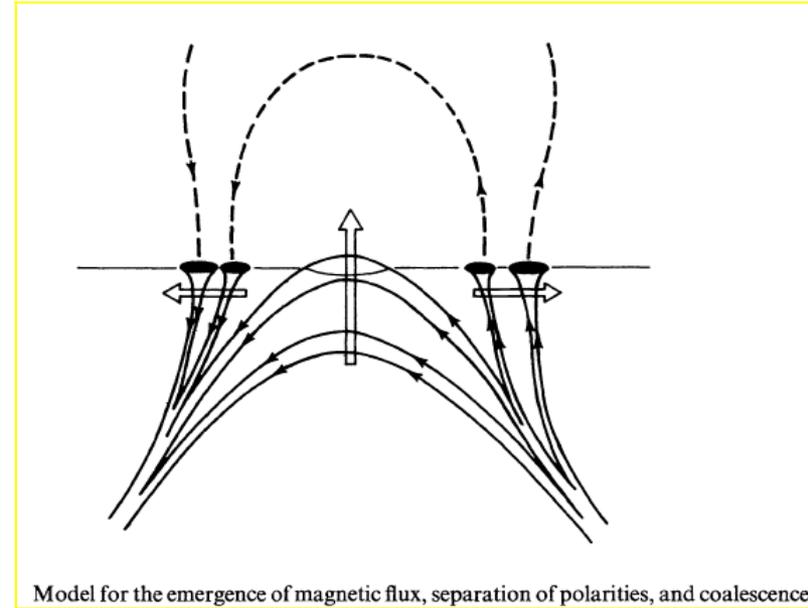
-> Druckgleichgewicht im Gas:

$$P_{\text{Fleck}} + \frac{B^2}{8\pi} = P_{\text{Röhre}} + \frac{B^2}{8\pi} = P_{\text{Extern}}$$

-> nur erreichbar, wenn:

$$T_{\text{Fleck}} < T_{\text{extern}} \quad \text{mit } P_{\text{Gas}} \sim nk_B T$$

Starke Magnetfelder verhindern Kühlung durch Konvektiven Strahlungstransport



Model for the emergence of magnetic flux, separation of polarities, and coalescence

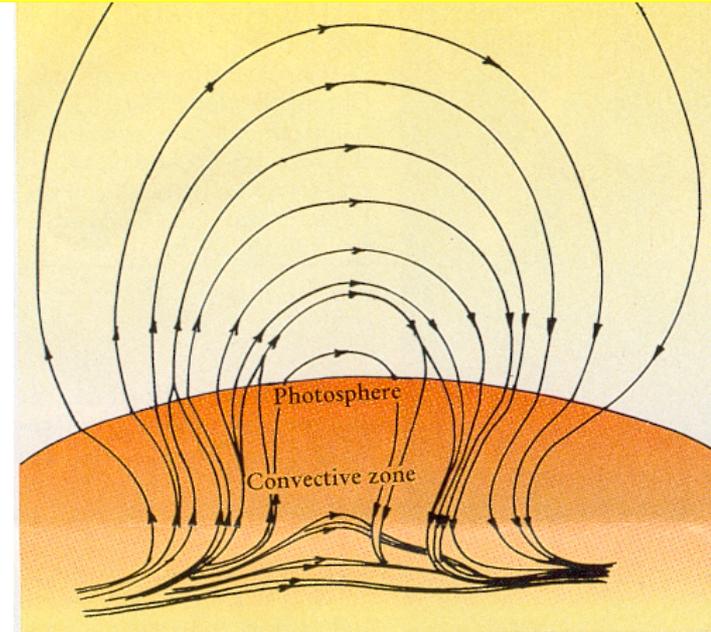


FIGURE 2. LARGE-SCALE STRUCTURE of a bipolar magnetic field, formed by the successive emergence of Ω loops from the general azimuthal field at the base of the Sun's convective zone.

9.2. Die Sonne

Protuberanzen, Filamente, Fackeln (“Flares”)

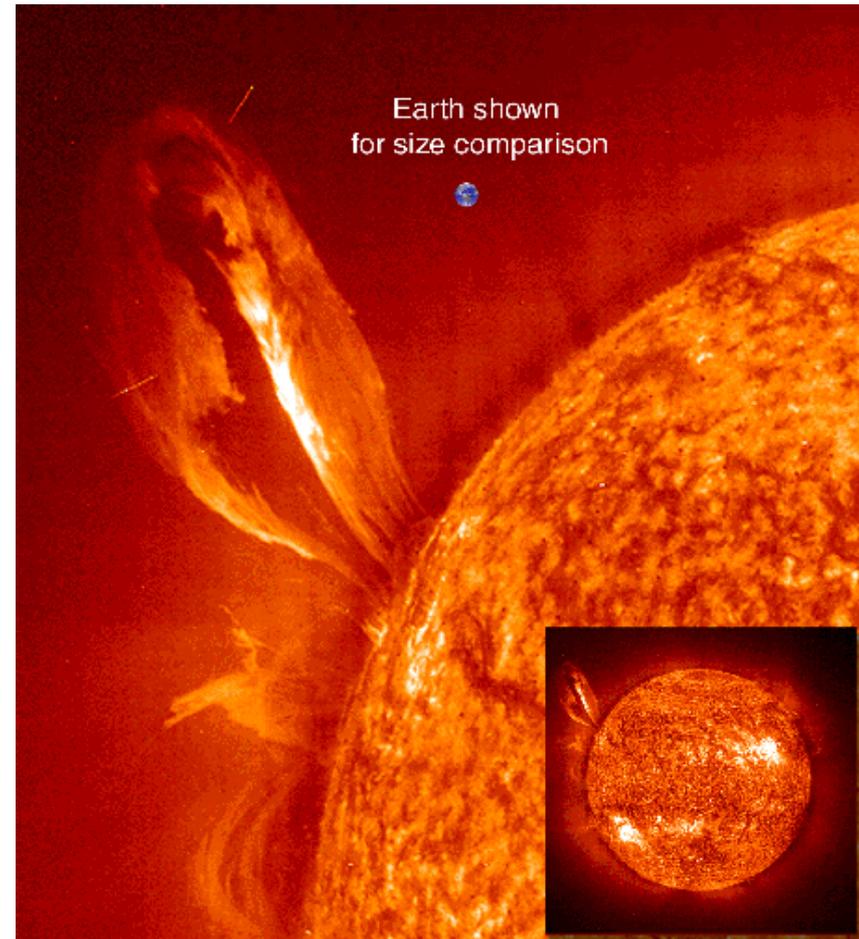
Einschluß von Gas im Magnetfeld, Aufsteigen magnetischer Bögen

Auch kleinere Protuberanzen werden beobachtet (Dauer ~ Monat)

Sonnenaktivität:

- > Polarlichter
- > Radio-Störungen auf der Erde

Große **Protuberanz**, beobachtet
im He II -Licht (304Å),
24. Juli 24, 1999,
größer als 35 Erdradien



9.2. Die Sonne

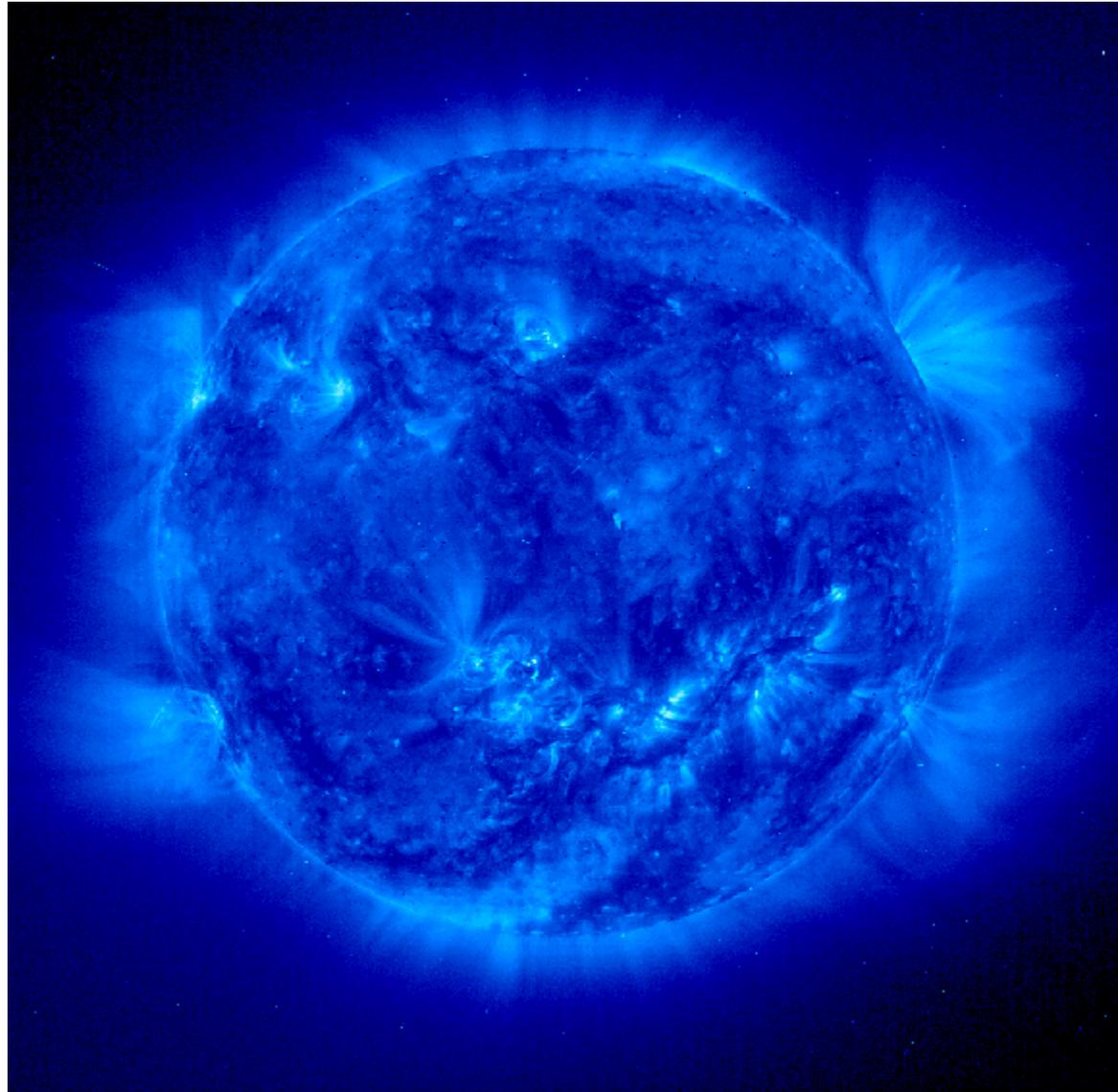
Aktivität auf allen Wellenlängen

Aktive Sonnenoberfläche
und magnetische Bögen
beobachtet mit dem
SOHO-Satelliten im

fernen UV:

Eisenlinie Fe IX/X 171Å

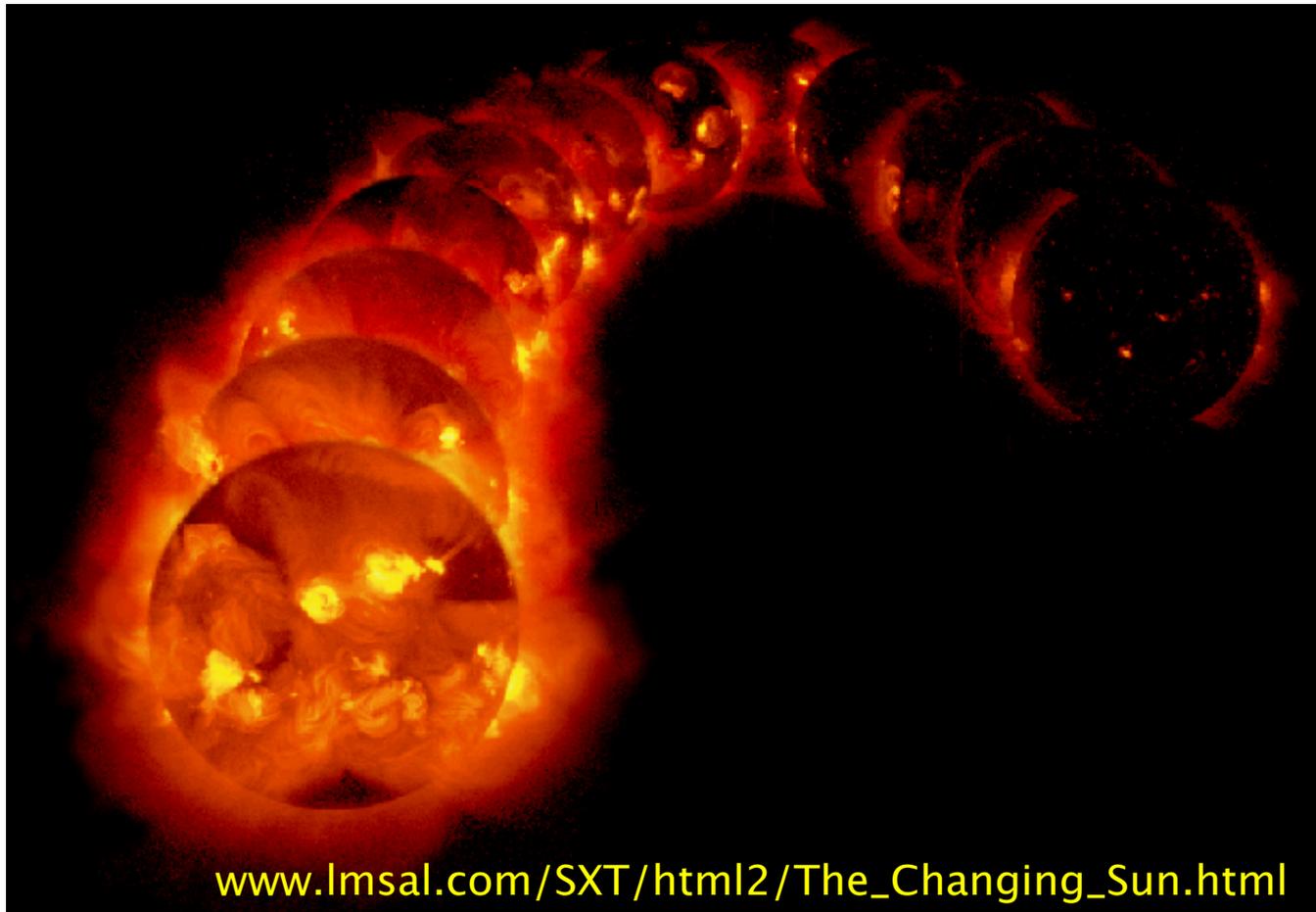
-> Strahlung entsteht in
der unteren Korona
bei Temperaturen
von ~Mio K



9.2. Die Sonne

Zeitliche Entwicklung der Aktivität

Entwicklung der Sonnen-Korona über einen Sonnenzyklus
Beobachtet mit dem Yohkoh-ISAS-Satelliten im **Röntgen-Bereich**



www.lmsal.com/SXT/html2/The_Changing_Sun.html

9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

9.3 Sternaufbau

- > Problemstellung, Arbeitshypothesen
- > Planparalleles Atmosphärenmodell
- > Sternaufbau-Gleichungen, Näherungen
- > Strahlungsdruck

9.3. Sternaufbau

Problemstellung:

Sternstruktur?

Energieerzeugung/ -transport?

Zeitliche Entwicklung der Sterne?

-> **Ziel:** Verständnis der empirischen Beziehungen (z.B. M-L)
aus physikalischen Gesetzen

-> Physikalische Beziehung zwischen:

- globalen Größen (Beobachtung): Masse M , Radius R , Leuchtkraft L
und
- lokalen Größen (innerer Aufbau): Temperatur T , Dichte ρ , Druck P

-> Vergleich Theorie / Beobachtung:

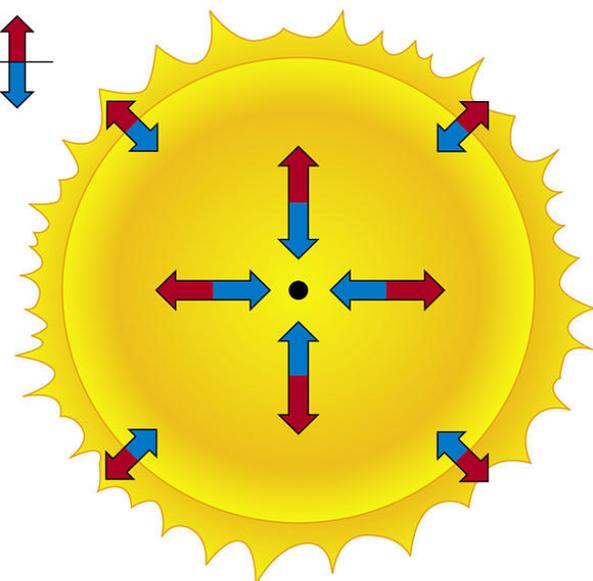
- Spektralklassen, Leuchtkraftklassen
- HRD: Hauptreihe, Riesenäste, Zwergsterne
- empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung

9.3. Sternaufbau

Arbeitshypothesen:

- 1) Sterne sind **Gaskugeln**, durch **Eigen-Gravitation** gebunden
 - 2) Sterne befinden sich nahe eines **Gleichgewichtszustandes** (= Hauptreihe des HRD)
 - 3) Energieverluste durch Strahlung:
 - > **Entwicklung** auf **langer Zeitskala**
 - > angenähert durch Reihe von Gleichgewichtszuständen
- > Löse **Erhaltungsgleichungen** von Masse, Impuls, & Energie,
-> diese vektornüpfen lokale und globale Größen

Pressure
out
Gravity
in

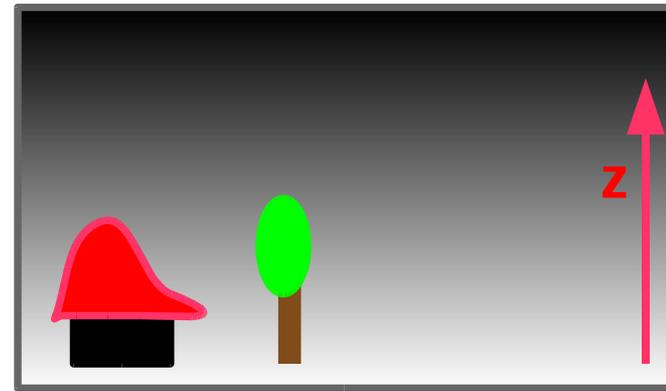


Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

9.3. Sternaufbau

Planparalleles Atmosphärenmodell:

-> Sterne, (Planeten)



Vertikales hydrostatisches Gleichgewicht:

-> genügend Druck, um darüberliegende Schichten zu tragen

Gravitationskraft (g konstant): $\vec{F}_G = -\frac{GM}{R^2} \vec{e}_z = -g \vec{e}_z$

Druckkraft (pro Einheitsfläche = Druck):

$$\frac{dP}{dz} = -g \rho(z) \rightarrow P(z) = g \int_z^\infty \rho(z') dz'$$

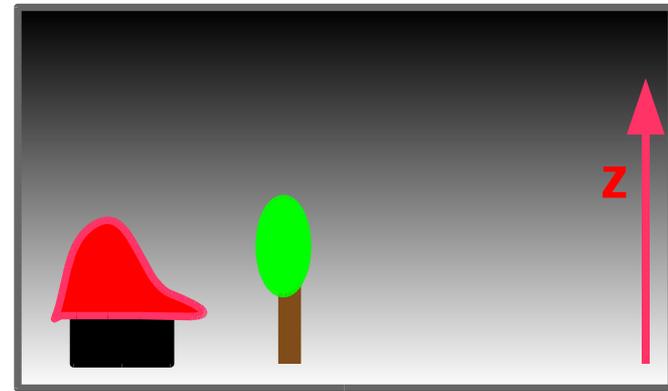
Mit idealem Gas: $P = \rho k_B T / m$

also:
$$T(z) \frac{d\rho(z)}{dz} + \rho \frac{dT(z)}{dz} = -\rho(z) \frac{gm}{k_B}$$

9.3. Sternaufbau

Planparalleles Atmosphärenmodell:

-> Sterne, (Planeten)



Vertikales hydrostatisches Gleichgewicht:

-> genügend Druck, um darüberliegende Schichten zu tragen

$$T(z) \frac{d\rho(z)}{dz} + \rho \frac{dT(z)}{dz} = -\rho(z) \frac{gm}{k_B}$$

Annahme **konstante Temperatur**: Lösung:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right), \quad \text{mit Druckskalenhöhe } H \equiv \frac{k_B T}{gm}$$

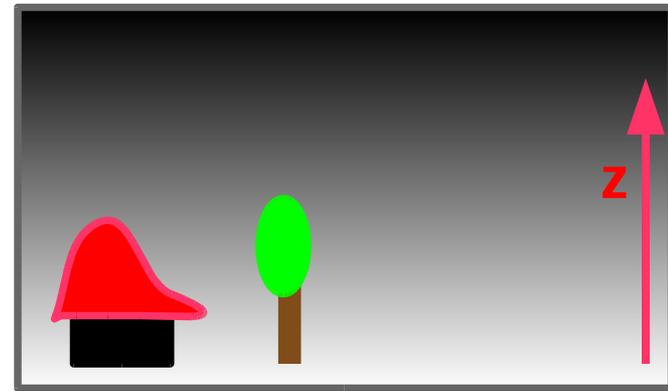
Annahme **KEINE** konstante Temperatur: "Druckskalenhöhe" $H(z) \equiv \frac{k_B T(z)}{gm}$

numerische Lösung auf dem Computer!

9.3. Sternaufbau

Planparalleles Atmosphärenmodell:

-> Sterne, (Planeten)



Was bestimmt die Temperaturverteilung?

$T(z)$ wird im Stern von komplizierten Prozessen bestimmt, u.a.:

- Energietransport durch **Strahlung** (Strahlungstransport)
- Energietransport durch **Konvektion**
- Heizung durch **Stoßwellen**
- Heizung durch “magnetische **Rekonnektion**”
- **Wärmeleitung**
- ggfs. externe **Anstrahlung** (Heizung)
- usw

Manche Prozesse für Sterne nicht genau verstanden

9.3. Sternaufbau

Grundgleichungen:

hier: kurze Diskussion (Ableitungen -> Vorlesung “Stellar Physics”)

1) **Massenerhaltung:** $M(r)$ = Masse innerhalb Radius r

2) **Impulserhaltung (linear):** $P(r)$, Kräfte (radial), Strahlungsdruck

3) **Energieerhaltung:** Energiefluß/-transport durch den Stern: $L(r)$

Strahlungsdiffusion, Konvektion, (Energieerzeugung)

-> **Allgemeine Lösung des Gleichungssystems auf dem Computer**

-> Einfache Lösungen: Lane-Emden: “polytrope Gaskugeln”

-> Abschätzungen

9.3. Sternaufbau

Überblick: Gleichungssystem: kein Prüfungsstoff -> "Stellar Physics"

1) Satz abhängiger Variabler:

$$M, L, \rho, T; \epsilon, \kappa, P, e$$

2) Erhaltungsgleichungen:

Massenerhaltung:

$$\frac{\partial M(r)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho$$

Impulserhaltung (Kräfte):

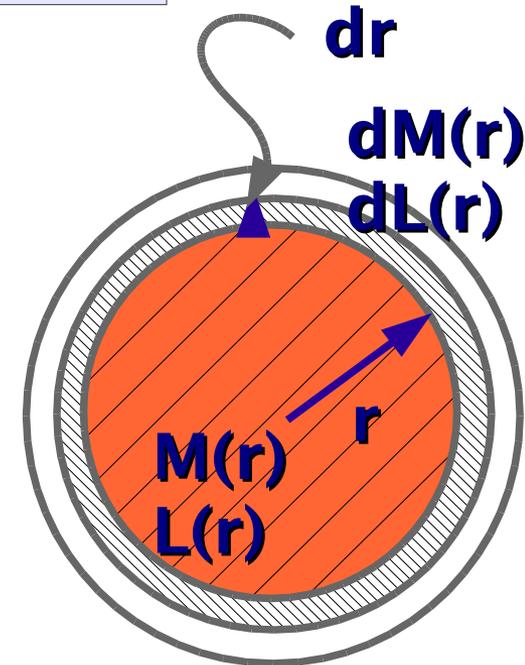
$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM_r \rho}{r^2}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{\partial L(r)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \epsilon(r)$$

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r}$$

bei Strahlungstransport



9.3. Sternaufbau

Überblick: Gleichungssystem: kein Prüfungsstoff -> “Stellar Physics”

3) Energieerzeugung, Opazität (später): $\epsilon = \epsilon(\rho, T); \kappa = \kappa(\rho, T)$

4) **Zustandsgleichungen** schließen das Gleichungssystem:

- monoatomisches Gas:

$$e = e(\rho, T) = \rho u = \frac{3}{2} \frac{k_B}{\mu m_H} \rho T$$

$$P = P(\rho, T) = \frac{k_B}{\mu m_H} \rho T$$

- Strahlungsfeld (Photonen):

$$u = a T^4, \quad P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4, \quad a \equiv \frac{4}{c} \sigma_{SB}$$

Loesung von 1-4 auf dem Computer

9.3. Sternaufbau

Abschätzungen aus den Gleichungen:

-> Übungsaufgabe

1) Bilde Mittelwerte der Größen:

$$r \simeq \frac{1}{2}R ; \quad M(r) \simeq M ; \quad \bar{\rho} =$$

2) Differenzen statt Ableitungen:

$$\text{z.B.: } \frac{\partial P}{\partial r} \simeq \frac{\Delta P}{\Delta R} ; \quad \Delta P = ?? ; \quad P_c \gg P(R) ; \quad \Delta R = R$$

-> Abschätzung Zentraldruck:

$$P_c \simeq$$

-> Zentraltemperatur:

$$T_c \simeq$$

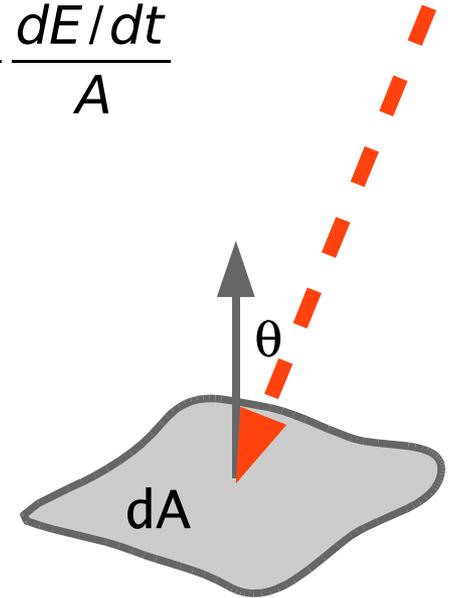
9.3. Sternaufbau

Einschub: Strahlungsdruck: Photon trägt Impuls $p = hv/c = E/c$

-> Licht übt "Strahlungsdruck" aus: $P = \frac{F}{A} = \frac{dp/dt}{A} = \frac{1}{c} \frac{dE/dt}{A}$

Strahlungsdruck eines Photonenstrahls mit Energie $E_\lambda d\lambda$, der im Winkel θ auf Fläche dA fällt:

$$dP_{rad,\lambda} = \frac{1}{c} \frac{(E_\lambda/dt) \cos\theta d\lambda}{dA}$$



-> Mit Intensität: $I_\lambda d\lambda = \frac{E_\lambda d\lambda}{dt dA \cos\theta d\Omega}$

-> Strahlungsdruck
im isotropen Strahlungsfeld:

$$P_{rad,\lambda} = \frac{4\pi}{3c} I_\lambda d\lambda$$

9.3. Sternaufbau

Einschub: **Strahlungsdruck:**

-> Beispiel Schwarzkörper: $I_\lambda = B_\lambda$

$$P_{rad} = \frac{4\pi}{3c} \int B_\lambda d\lambda = \frac{4\pi}{3c} \frac{\sigma_{SB} T^4}{\pi} = \frac{4}{3c} \sigma_{SB} T^4 = \frac{1}{3} u$$

-> $P_{rad} = u/3$ mit Energiedichte $u = \frac{4}{c} \sigma_{SB} T^4$

-> Raumtemperatur:

$$P_{rad} = 1.8 \times 10^{-6} \text{ Pa} = 1.8 \times 10^{-12} \text{ atm}$$

-> Bei $T = 10^7$ K:

$$P_{rad} = 2.3 \times 10^6 \text{ atm}$$

Strahlungsdruck nur in sehr heißen Sternen wichtig

9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

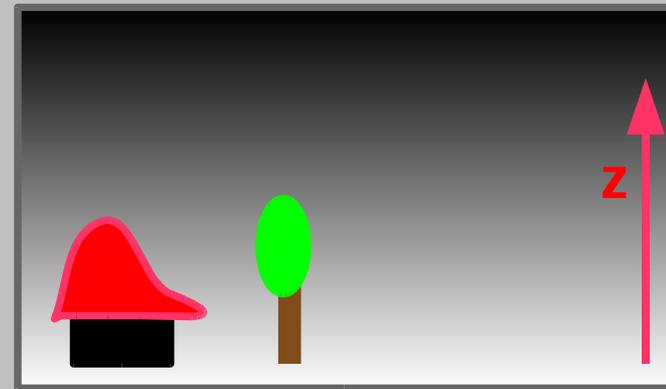
9.4 Energietransport

- > Konvektion
- > Strahlungsdiffusion

9.3. Sternaufbau

Planparalleles Atmosphärenmodell:

-> Sterne, (Planeten)



Was bestimmt die Temperaturverteilung?

$T(z)$ wird im Stern von komplizierten Prozessen bestimmt, u.a.:

- Energietransport durch **Strahlung** (Strahlungstransport)

- **Energietransport durch Konvektion**

- Heizung durch **Stoßwellen**

- Heizung durch “magnetische **Rekonnektion**”

- **Wärmeleitung**

- ggfs. externe **Anstrahlung** (Heizung)

- usw

Manche Prozesse für Sterne nicht genau verstanden

9.4. Energietransport

Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

-> immer im **Druckgleichgewicht** mit der Umgebung:

-> **adiabatische Ausdehnung**, so dass immer gilt

$$P_{\text{innen}} = P_{\text{außen}}$$

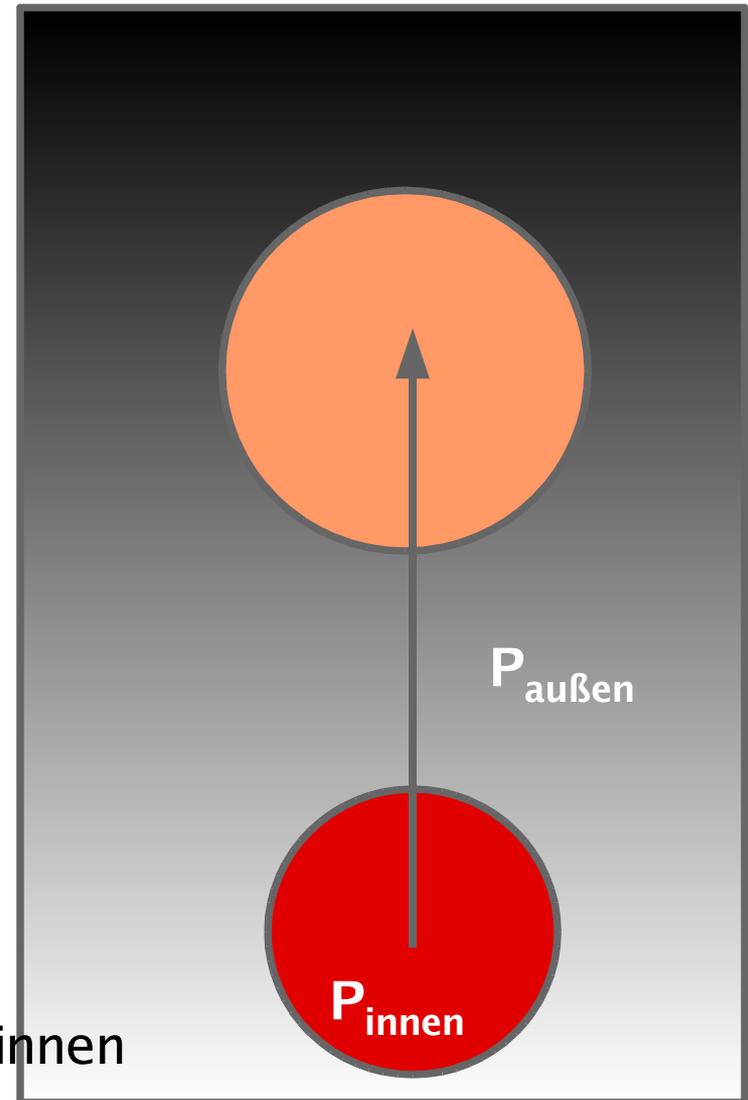
-> Adiabategleichung:

$$P \propto V^{-\gamma} \propto \rho^{\gamma} \propto T^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Adiabatenexponent γ

-> **Außendruck** $P_{\text{außen}}(z)$ ist Lösung der **hydrostatischen** Gleichung

-> betrachte Dichteänderungen außen/innen



9.4. Energietransport

Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck $P_{\text{außen}}(z)$ ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

1) Konvektive Atmosphäre:

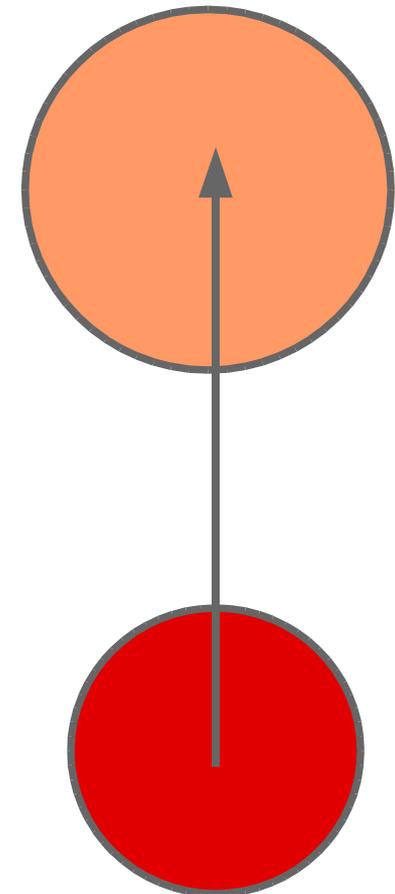
$$\rho_{\text{innen}} < \rho_{\text{außen}} \quad \text{bei} \quad P_{\text{innen}} = P_{\text{außen}}$$

- > Blase steigt weiter, da leichter als Umgebung
- > instabil

2) Stabile Atmosphäre:

$$\rho_{\text{innen}} > \rho_{\text{außen}} \quad \text{bei} \quad P_{\text{innen}} = P_{\text{außen}}$$

- > Blase steigt sinkt, da schwerer als Umgebung
- > stabil



9.4. Energietransport

Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck $P_{\text{außen}}(z)$ ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Zur Berechnung: $P \propto \rho^\gamma \rightarrow \rho \propto P^{1/\gamma}$

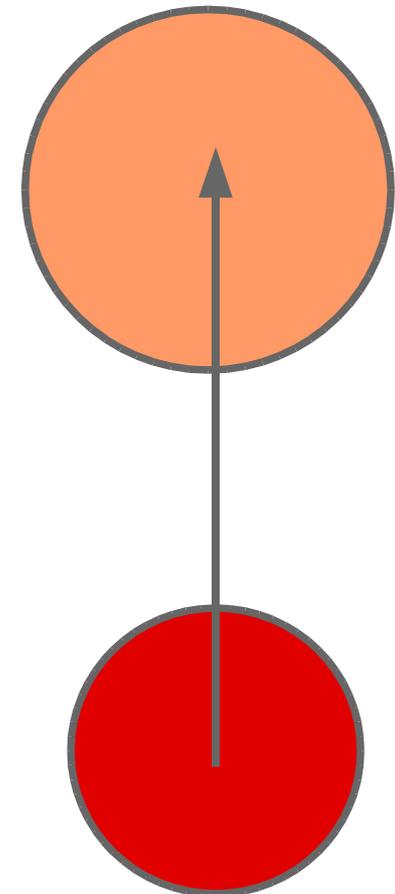
- > doppelt-logarithmische Ableitung:

$$\left[\frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{\gamma}$$

Schwarzschild-Kriterium:

- > stabile Atmosphäre für

$$\left[\frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{Atmosphäre}} > \left[\frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{\gamma}$$



9.4. Energietransport

Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck $P_{\text{außen}}(z)$ ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Berechnung: $P \propto \rho^\gamma \rightarrow \rho \propto P^{1/\gamma}$

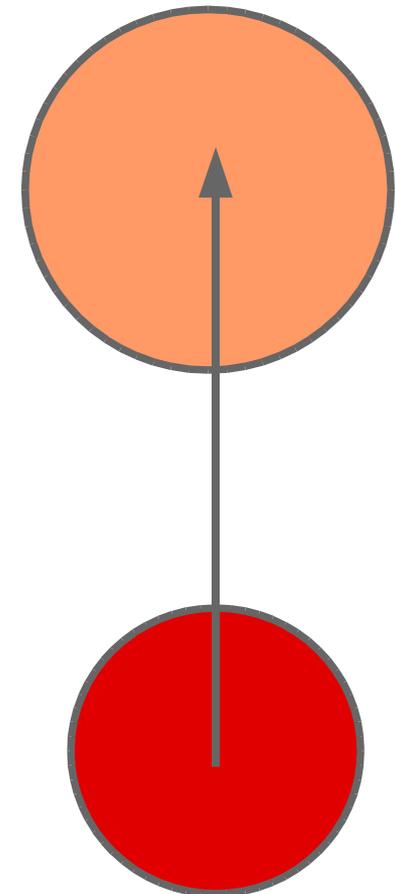
- > doppeltlogarithmische Ableitung:

$$\left[\frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{\gamma}$$

Schwarzschild-Kriterium:

- > konvektive Atmosphäre für

$$\left[\frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{Atmosphäre}} < \left[\frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{\gamma}$$



9.4. Energietransport

Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck $P_{\text{außen}}(z)$ ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Berechnung: $P \propto T^{\gamma/(\gamma-1)} \rightarrow T \propto P^{(\gamma-1)/\gamma}$

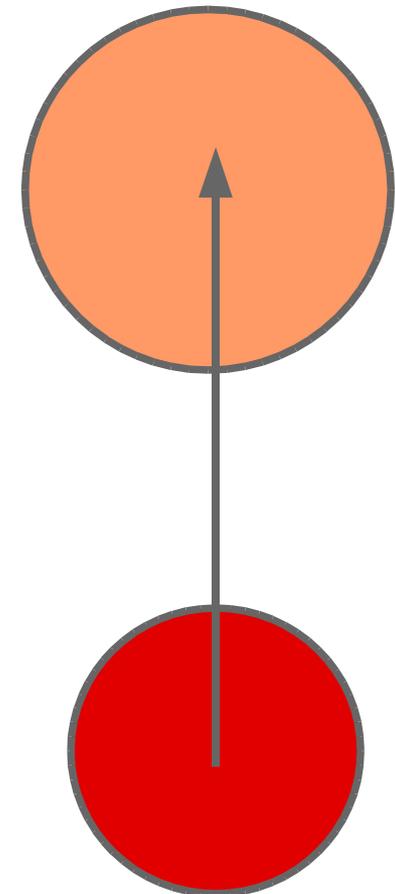
- > doppelt-log. Ableitung, “Adiabatengradient”:

$$\nabla_{ad} \equiv \left[\frac{d \ln T}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

Schwarzschild-Kriterium:

- > konvektive Atmosphäre für

$$\left[\frac{d \ln T}{d \ln P} \right]_{\text{Atmosphäre}} > \left[\frac{d T}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$



9.4. Energietransport

Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck $P_{\text{außen}}(z)$ ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Betrachte Gradienten (Dichte):

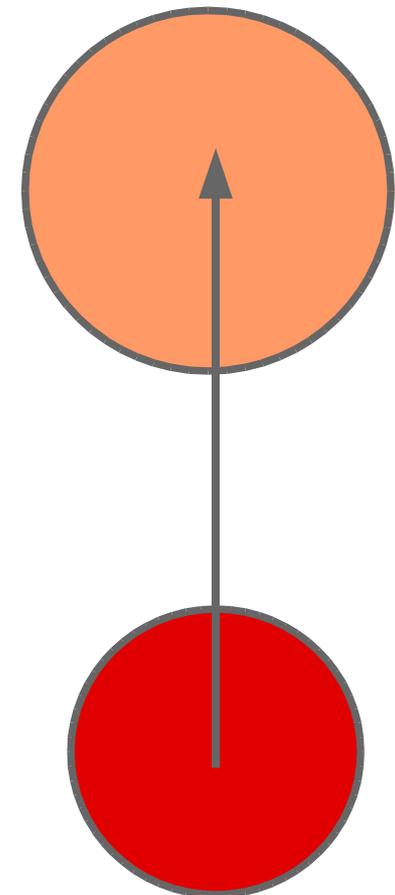
- > Ableitung der Dichte:

$$\left[\frac{d\rho(z)}{dz} \right]_{\text{ad}} = \left[\frac{d\rho}{dP} \right]_{\text{ad}} \frac{dP(z)}{dz} = \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP(z)}{dz}$$

Schwarzschild-Kriterium:

- > konvektive Atmosphäre für

$$\left[\frac{d\rho(z)}{dz} \right]_{\text{Atmosphäre}} > \left[\frac{d\rho(z)}{dz} \right]_{\text{adiabatisch}}$$



9.4. Energietransport

Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck $P_{\text{außen}}(z)$ ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Betrachte Gradienten (Temperatur):

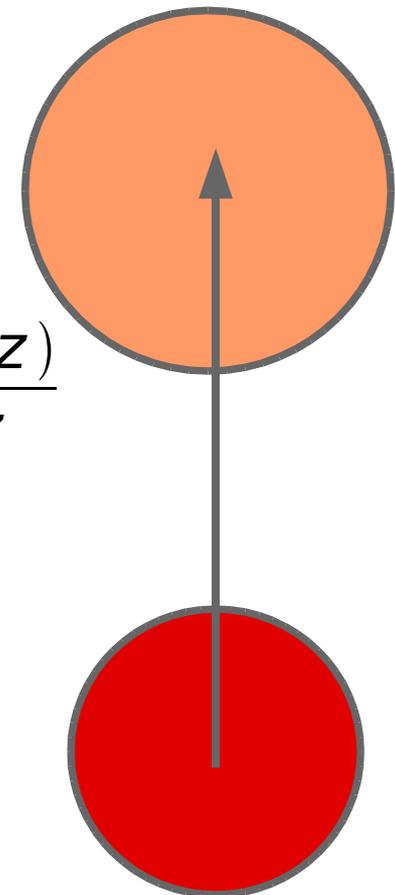
- > Ableitung der Temperatur:

$$\left[\frac{dT(z)}{dz} \right]_{\text{ad}} = \left[\frac{dT}{dP} \right]_{\text{ad}} \frac{dP(z)}{dz} = \frac{(\gamma-1) T}{\gamma P} \frac{dP(z)}{dz}$$

Schwarzschild-Kriterium:

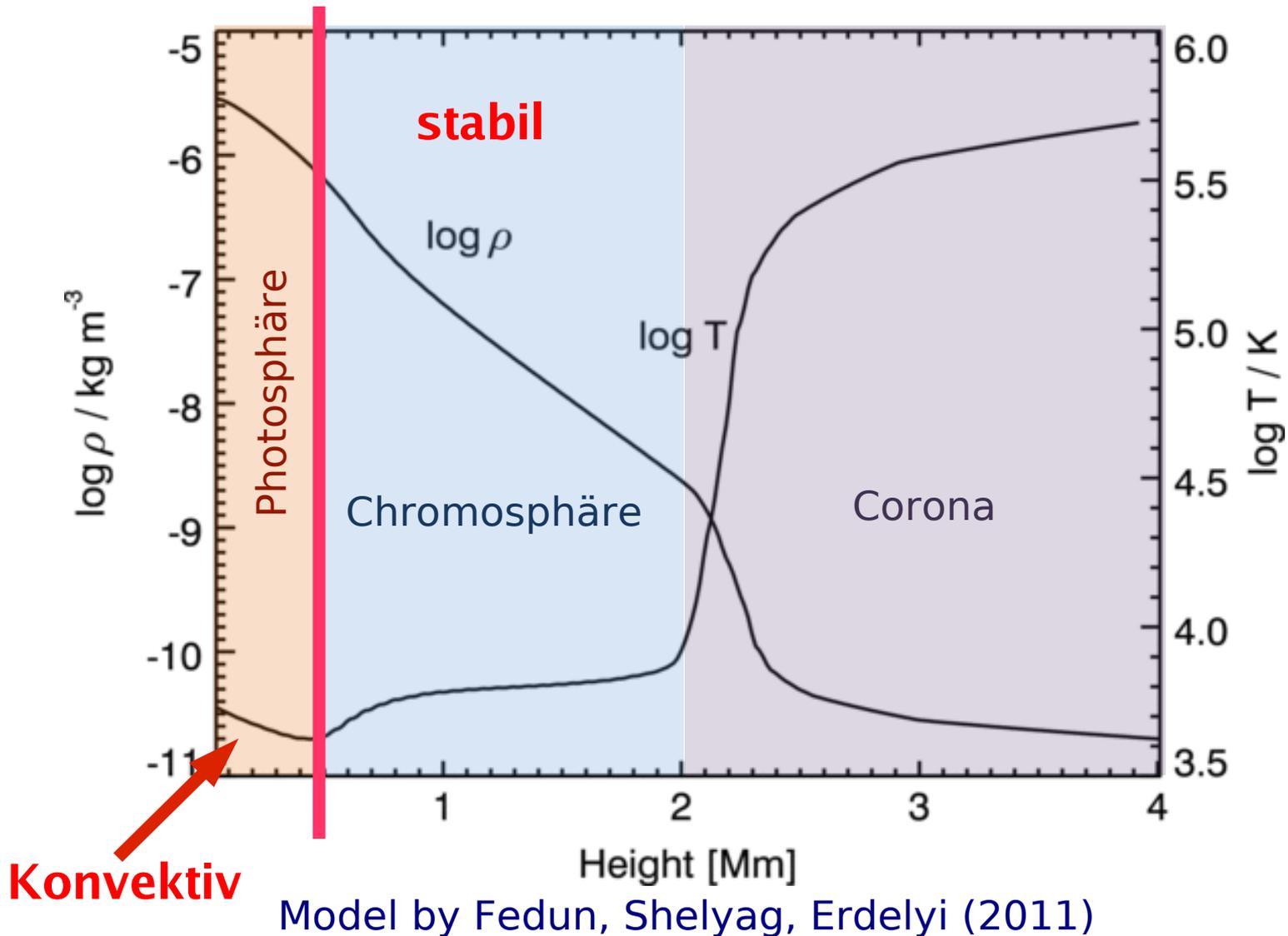
- > konvektive Atmosphäre für

$$\left[\frac{dT(z)}{dz} \right]_{\text{Atmosphäre}} < \left[\frac{dT(z)}{dz} \right]_{\text{adiabatisch}}$$



9.4. Energietransport

Beispiel Sonne: 1D Modellierung Photosphäre bis Korona

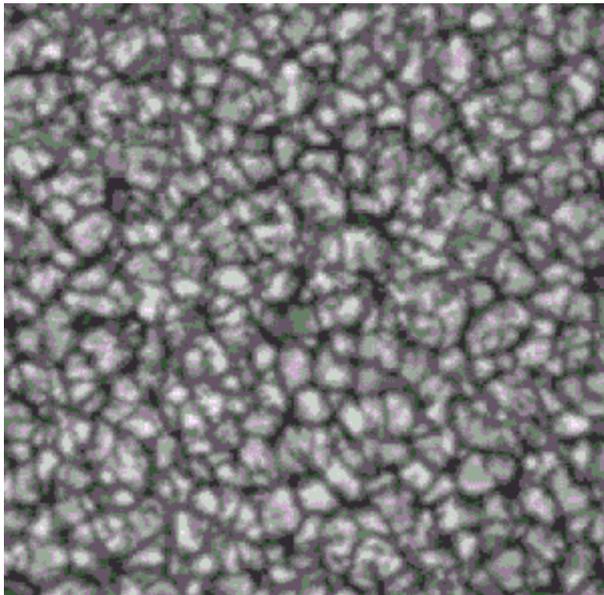


9.4. Energietransport

Beispiel Sonnenphotosphäre

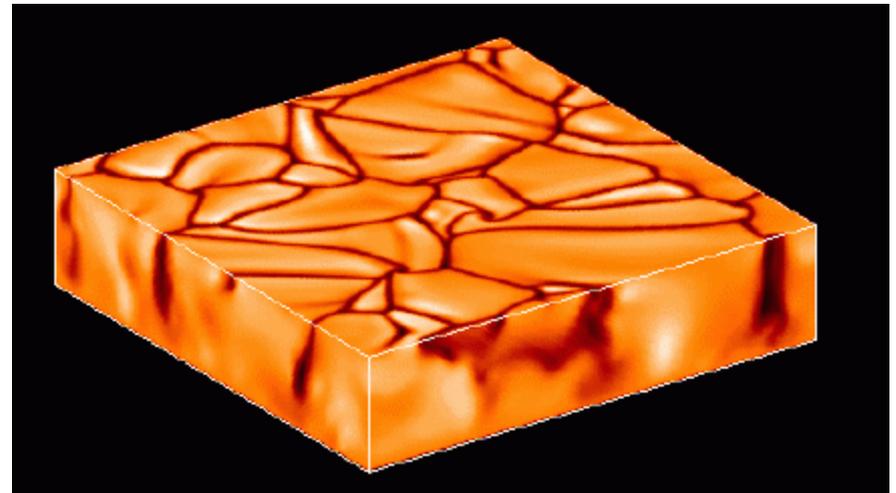
Beobachtung:

— ~5000km



From:
<http://ircamera.as.arizona.edu/hysast.uga.edu/>

Numerische Simulation:



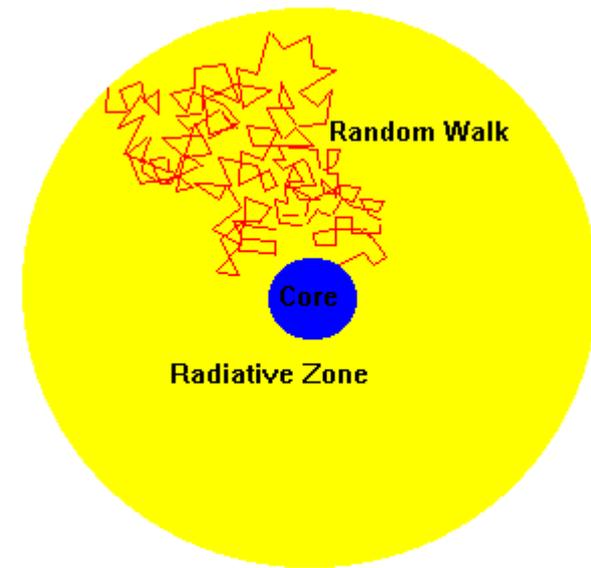
people.hao.ucar.edu/yfan/subsurface.html

9.4. Energietransport

Energie-Transport durch Strahlung:

Transparentes Medium ($\tau \ll 1$):

Leuchtkraft $L(r)$ durch Integration der emittierten Photonen bei jedem Radius r
(bei Kenntnis von Dichte, Temperatur, Besetzungszahlen)



Im realen Stern:

Mittlere freie Weglänge L_{ph} der Photonen: $L_{ph} = (\kappa \rho)^{-1}$

Achtung: traditionell wird beim Thema Sternaufbau der Massenabsorptionskoeffizient verwendet, z.B. $d\tau = \kappa \rho ds$

Bsp. **Sonne:** mit mittlerem Absorptionskoeffizienten $\kappa = 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$ (Thomson-Streuung), und mittlerer Dichte $\rho = 1.4 \text{ g/cm}^3 \rightarrow L_{ph} \sim 2 \text{ cm}$

Das Entweichen der Photonen aus einem Stern ist ein **diffusiver Prozeß**

9.4. Energietransport

Diffusiver Strahlungstransport:

Ansatz:

Gradient in der Photonen- **Energiedichte** u
führt zu Diffusion und damit zu einem Netto-
Photonentransport:

$$F = -D \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{allgemein:} \quad F = -D \nabla u$$

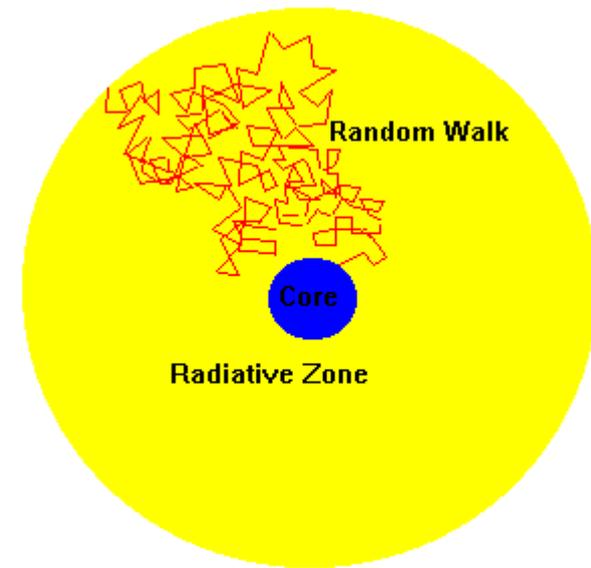
mit Diffusionskoeffizient: $D \equiv \frac{1}{3} L_{ph} c ; L_{ph} \sim \frac{1}{\kappa \rho}$

-> mit Stefan-Boltzmann $F = \sigma_{SB} T^4$, bzw. $u = (4\sigma_{SB}/c) T^4 = aT^4$

Strahlungsfluß im Stern:

$$F = \frac{L_r}{4\pi r^2} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r}$$

-> Energietransport: $F \sim \kappa^{-1}$



9.4. Energietransport

Energietransport durch Strahlung:

Problem: Opazitäten für radiativen Energietransport ??

Absorptionskoeffizient $\kappa = \kappa(\rho, T)$ in cm^2/g

ist Funktion von: chemischer Zusammensetzung, Ionisationsstufe, Besetzungszahlen atomarer Energieniveaus

-> Atomphysikalische Rechnungen liefern frequenz-abhängigen Absorptionskoeffizienten κ_ν (tabellarisch, z.B. OPAL-Tabellen)

-> für Sternaufbau: Rosseland'scher Mittelwert über Frequenzen:

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} = \frac{\pi}{a c T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu$$

-> Merke: Energietransport: $F \sim \kappa^{-1}$

9.4. Energietransport

Rosseland'sche Opazität:

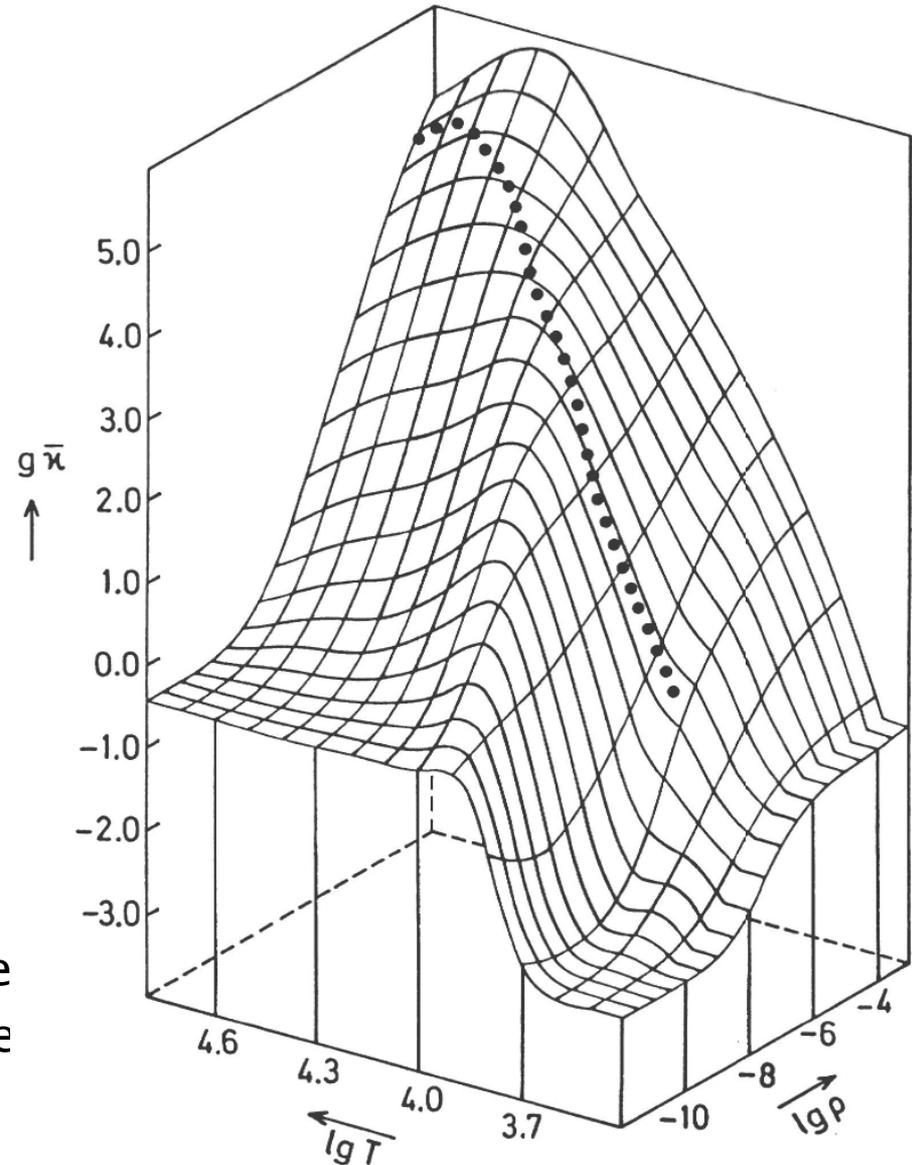
Beispiele von Computermodellen
(aus Kippenhahn-Weigert)

Rosseland-Opazität als
Funktion von
Dichte und Temperatur
(Los Alamos code)

Massenverhältnisse
 $X=0.739$ und $Y=0.240$

-> entsprechend der
äußeren Schichten
eines Sterns

Werte für **Sonne** gepunkte
(Beginn rechts mit Photosphäre



9.3. Sternaufbau

Adiabatengradient:

Praxis: Aus Kenntnis von L_r , M_r , ρ , T bei Radius r -> berechne ∇_{rad} , ∇_{ad}

-> für $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$

radiativer Energietransport:

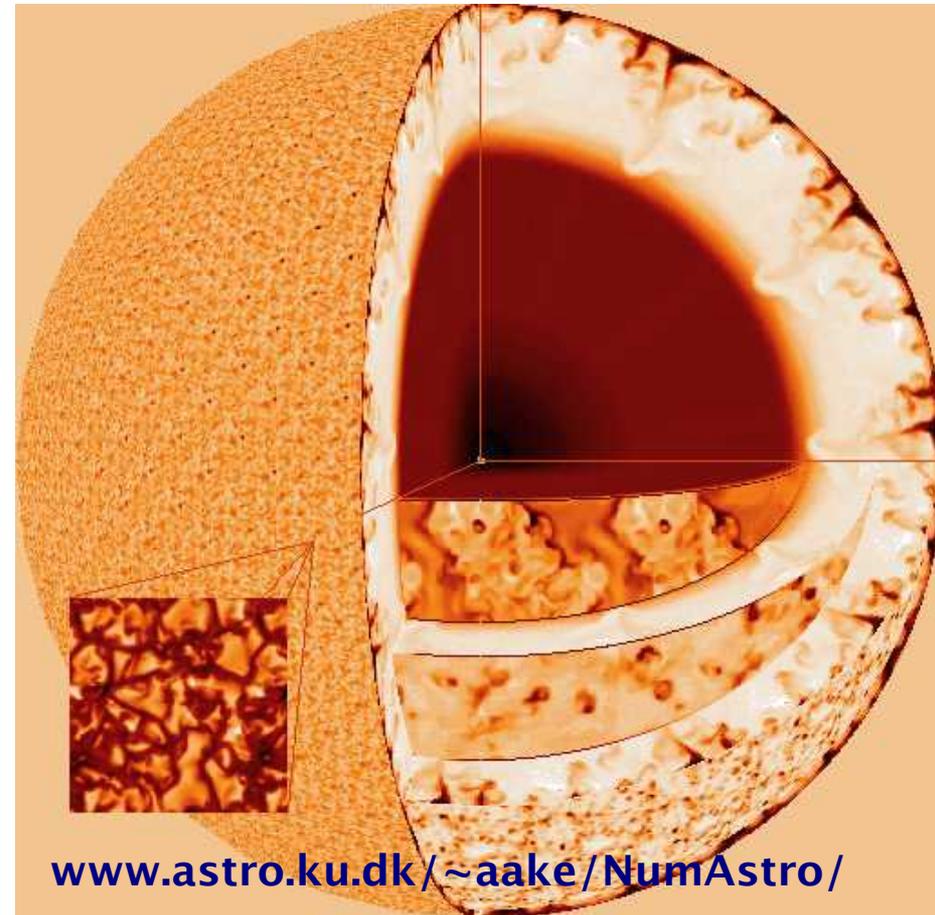
$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{3 \kappa \rho}{4 a c T^3} \frac{L_r}{4 \pi r^2}$$

-> für $\nabla_{rad} < \nabla_{ad}$

konvektiver Energietransport:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{GM_r}{r^2} \rho$$

Numerische Simulation der Sonnenhülle

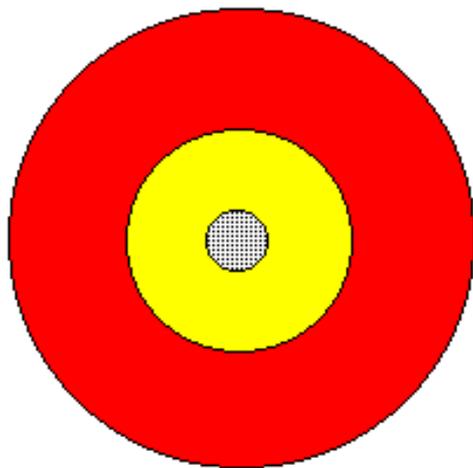


9.4. Energietransport

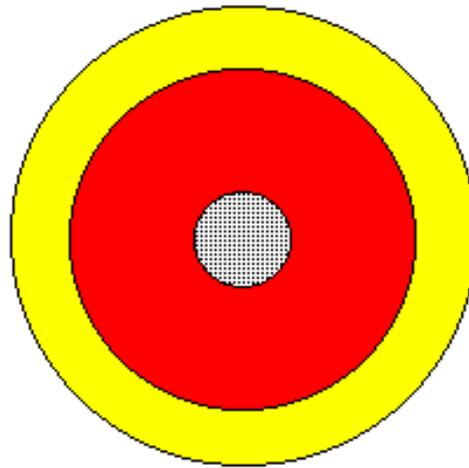
Sternstruktur verschiedener Sternklassen (Hauptreihe)

- > Unterschiedliche Lage der radiative/konvektive Zonen:
 - “obere” Hauptreihe: radiative Hülle, konvektiver Kern
 - “untere” Hauptreihe: konvektive Hülle, radiativer Kern

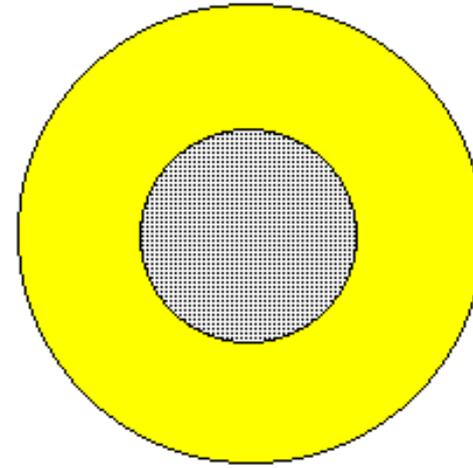
Internal Structure for Main Sequence Stars



O star
(60 solar masses)



G star
(1 solar mass)



M star
(0.1 solar masses)



radiative zone



convective zone



nuclear burning region

9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

Zusammenfassung

- > **Wiederholung:** Spektraltypen: O-B-A-F-G-K-M-R-N, Effektivtemp., Leuchtkraftklassen (Riesen / Zwerge), Sternradien, Hertzsprung-Russell-Diagramm
- > **Sternparameter:** Radius, Masse, Massenbestimmung durch Doppelsterne, Metallizität
- > **Masse-Leuchtkraft-Beziehung:** fundamental für Astrophysik
- > **Sonne:** phenomenologisch: äußere Schichtung, Aktivität, Flecken, Ausbrüche, Protuberanzen
- > **Sternaufbau:** Grundlegende Annahmen, hydrostatische Schichtung, Strahlungsdruck, grundlegende Gleichungen (kein Prüfungsstoff)
- > **Energietransport** durch Konvektion und Strahlungsdiffusion, Opazitäten

Einführung in die Astronomie und Astrophysik I

- 17.10. Einführung: Überblick & Geschichte (H.B.)
- 24.10. Sternpositionen, Koordinaten, Zeitmessung (C.F.)
- 31.10. Teleskope und Instrumentierung (H.B.)
- 07.11. Strahlung, Strahlungstransport (C.F.)
- 14.11. Planetensystem(e) & Keplergesetze (H.B.)
- 21.11. Sterne, Typen / Klassifikation, HR-Diagramm (C.F.)
- 28.11. Interstellare Materie: Chemie & Matriekreislauf (H.B.)
- 05.12. Sternentstehung, Akkretionsscheiben & Jets (H.B.)
- 12.12. Sternaufbau & -entwicklung I: Sternparameter, Hauptreihe (C.F.)
- 19.12. Sternaufbau & -entwicklung II: Energieerzeugung, Endstadien (C.F.)**
- - - Weihnachtspause
- 09.01. Mehrfachsysteme & Sternhaufen, Dynamik (C.F.)
- 16.01. Exoplaneten & Astrobiologie (H.B.)
- 23.01. Die Milchstraße (H.B.)
- 30.01. Zusammenfassung (C.F. & H.B.)
- 08.02. (Samstag) Prüfung: 15:00 - 17:00, INF 227**

9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

Appendix

9.1. Weitere Sternparameter

Einschub: Inklination der Bahnebene

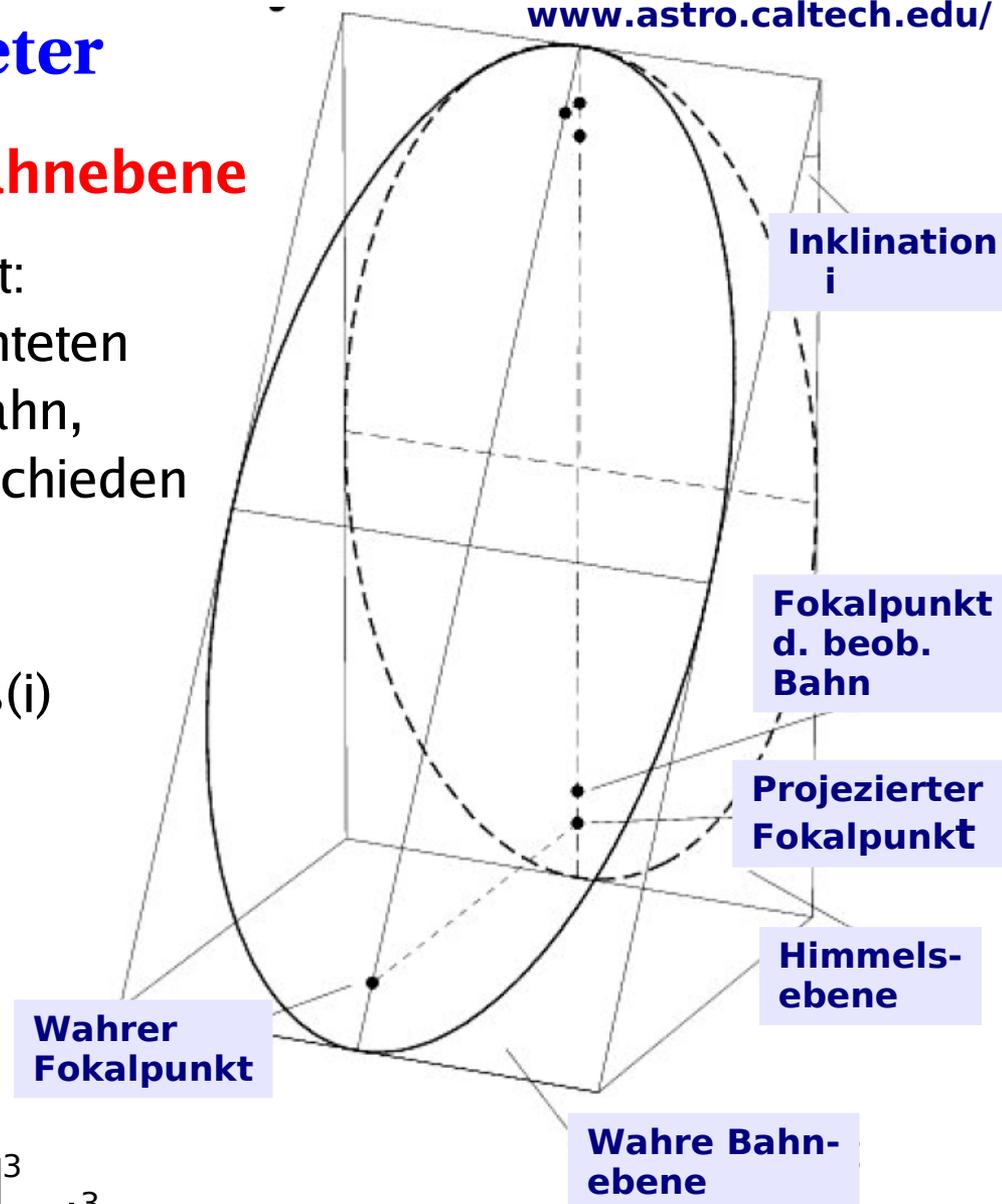
- > scheinbare Bahnellipse verzerrt:
(Haupt-) Stern nicht im beobachteten **Fokalkpunkt** der scheinbaren Bahn,
beobachtete **Exzentrizität** verschieden
von wahrer Exzentrizität:
- > wahre Halbachse α ,
scheinbare Halbachse $\alpha \cos(i)$

- > Inklination ändert nicht das
beob. **Massenverhältnis**:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2 \cos i}{\alpha_1 \cos i} = \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1}$$

aber die **Gesamtmasse**:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2}{GP^2} \left[\frac{D}{\cos i} \right]^3 \alpha'^3$$

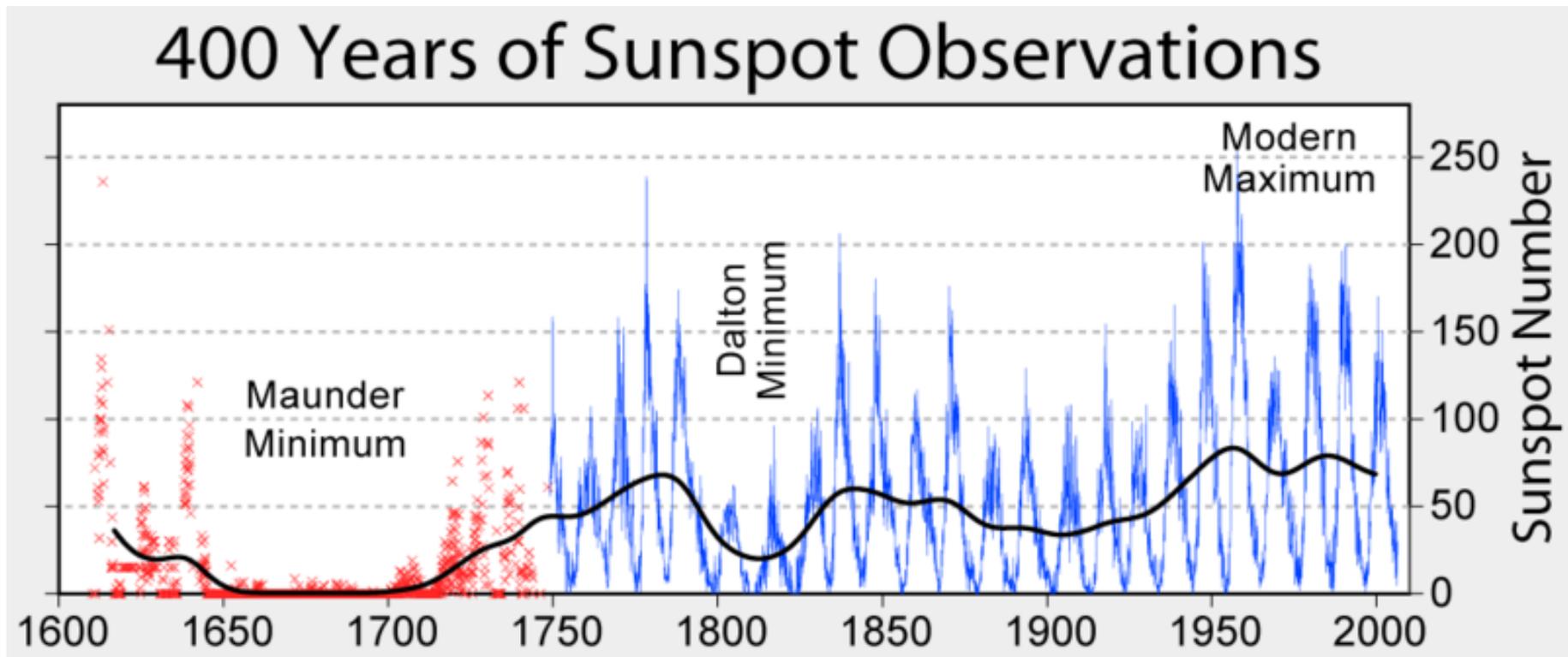


- > **Inklination i kann bestimmt werden, falls Bahn genügend genau beobachtet**

9.2. Die Sonne

Sonnenflecken

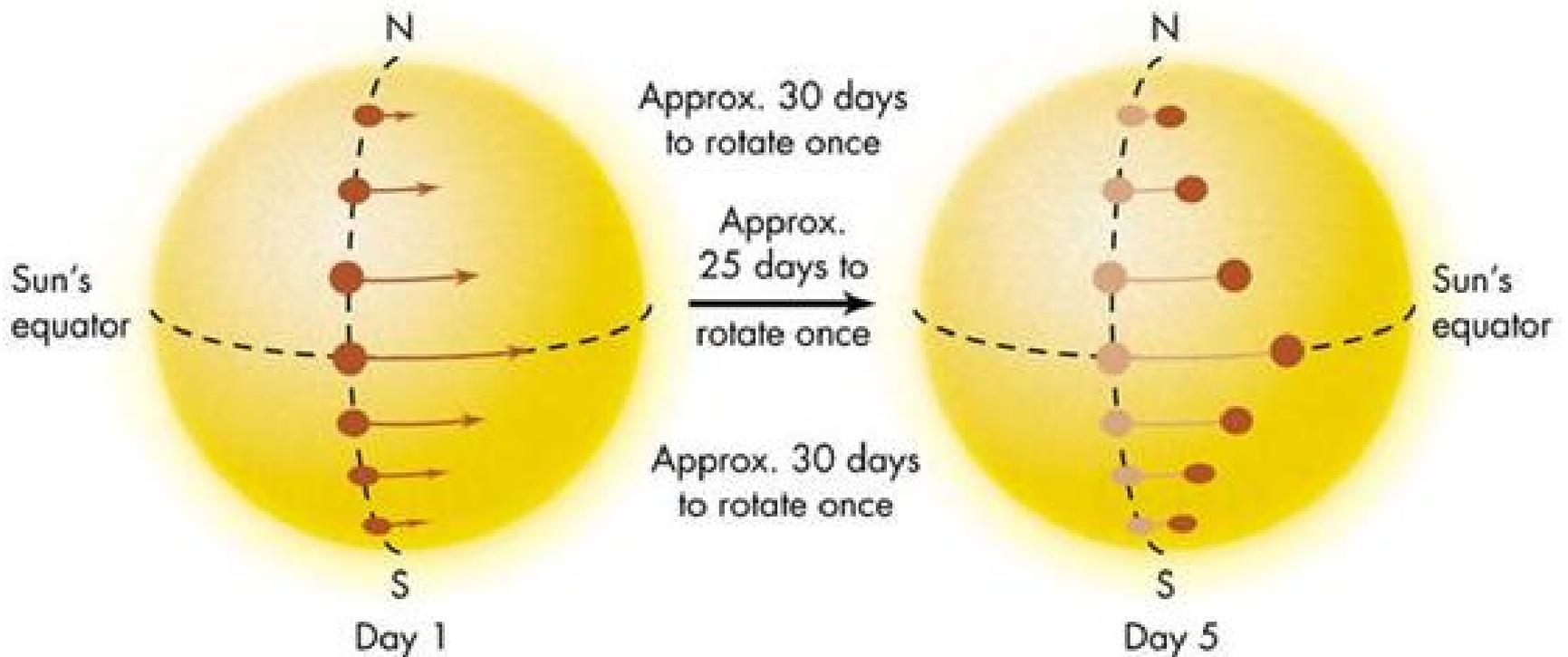
Langzeitige Variation der Sonnenaktivität,
ungelöstes Problem: Entstehung? Dauer? der Minima



9.2. Die Sonne

Sonnenflecken: Schmetterlingsdiagramm:

Position der Sonnenflecken (heliographische Breite) variiert mit der Zeit durch differentielle Rotation und den 11-jhr. Dynamo-Zyklus der Magnetfelderzeugung):

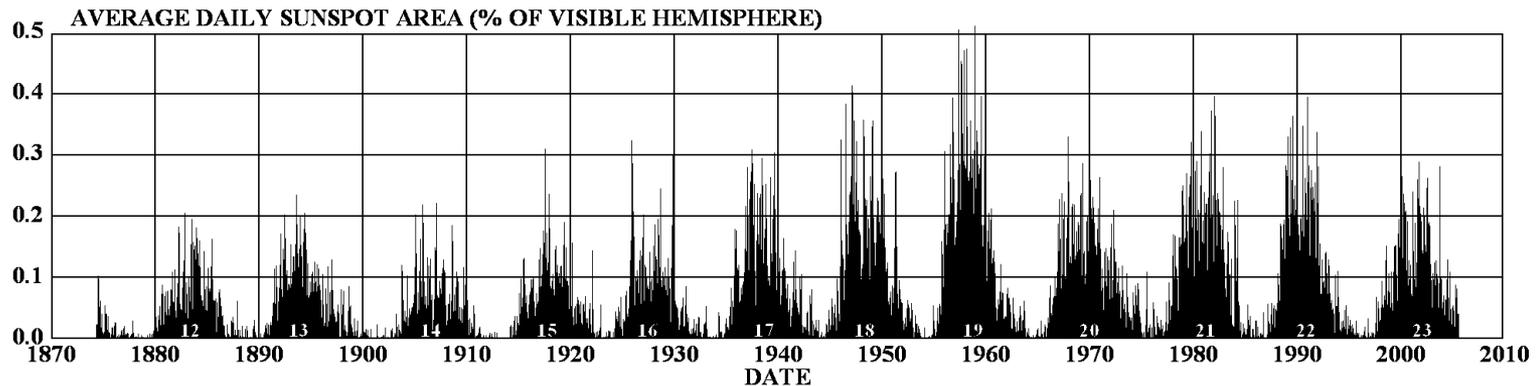
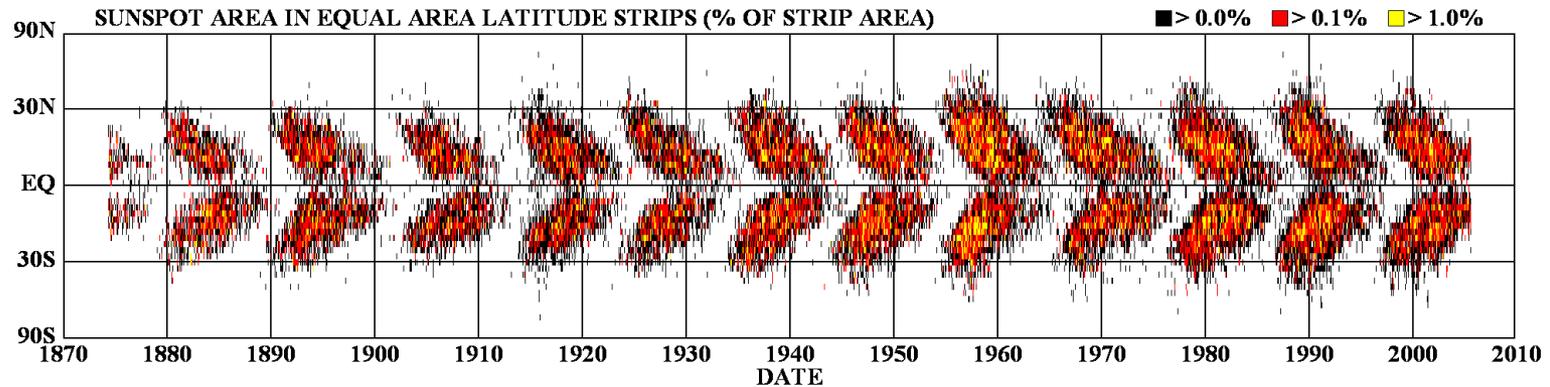


9.2. Die Sonne

Sonnenflecken: Schmetterlingsdiagramm:

Position der Sonnenflecken (heliographische Breite) variiert mit der Zeit (differentielle Rotation, Dynamo-Zyklus):

DAILY SUNSPOT AREA AVERAGED OVER INDIVIDUAL SOLAR ROTATIONS



9.3. Sternaufbau

Adiabatengradient:

Adiabatische Zustandgleichung: $P \propto \rho^\gamma \rightarrow T \propto P^{1-1/\gamma}$

-> Ableitung: $(d \ln T)_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) (d \ln P)_{ad}$

-> Definition: Adiabatengradient: $\nabla_{ad} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$

-> Konvektionsinstabilität erfordert:

$$\nabla_{ad} < \nabla_{rad}$$

Schwarzschild-Kriterium für Konvektion

-> Aus Energietransport- Gleichung $F = \frac{L(r)}{4\pi r^2} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r}$

und hydrostatischem GG $\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$

folgt $\nabla_{rad} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{rad} = \frac{3\kappa P}{16\pi acGT^4} \frac{L(r)}{M(r)}$

9.3. Sternaufbau

Adiabatengradient:

Praxis: Aus Kenntnis von L_r , M_r , ρ , T bei Radius r -> berechne ∇_{rad} , ∇_{ad}

-> für $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$

radiativer Energietransport:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{3 \kappa \rho}{4 a c T^3} \frac{L_r}{4 \pi r^2}$$

-> für $\nabla_{rad} < \nabla_{ad}$

konvektiver Energietransport:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{GM_r}{r^2} \rho$$

Numerische Simulation der Sonnenhülle

