

# Einführung in die Astronomie und Astrophysik I

- 17.10. Einführung: Überblick & Geschichte (H.B.)
- 24.10. Sternpositionen, Koordinaten, Zeitmessung (C.F.)
- 31.10. Teleskope und Instrumentierung (H.B.)
- 07.11. Strahlung, Strahlungstransport (C.F.)
- 14.11. Planetensystem(e) & Keplergesetze (H.B.)
- 21.11. Sterne, Typen / Klassifikation, HR-Diagramm (C.F.)
- 28.11. Interstellare Materie: Chemie & Matriekreislauf (H.B.)
- 05.12. Sternentstehung, Akkretionsscheiben & Jets (H.B.)
- 12.12. Sternaufbau & -entwicklung I: Parameter, Hauptreihe (C.F.)**
- 19.12. Sternaufbau & -entwicklung II: Energieerzeugung, Endstadien (C.F.)
- - - Weihnachtspause
- 09.01. Mehrfachsysteme & Sternhaufen, Dynamik (C.F.)
- 16.01. Exoplaneten & Astrobiologie (H.B.)
- 23.01. Die Milchstraße (H.B.)
- 30.01. Zusammenfassung (C.F. & H.B.)
- 08.02. (Samstag) Prüfung: 15:00 - 17:00, INF 227**

# Einführung in die Astronomie und Astrophysik I

**Wiederholung:** Sternklassifikation, HR-Diagramm

## 9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

9.1. Weitere Sternparameter

9.2. Sonne

9.3. Sternaufbau

9.4. Energietransport

## 6.2. Sternklassifikation

**Leuchtkraft** des Sterns (Definition):

$$L = 4 \pi R^2 F$$

->  $F$  ist ausgestrahlte Energie pro Fläche

Für Schwarzkörper: Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$F = \sigma_{SB} T^4 \quad \sigma_{SB} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$$

**Aber:** Sterne sind keine schwarzen Körper!!

-> Definition einer

**“Effektivtemperatur”:**

$$T_{eff} = \left( \frac{L}{\sigma_{SB} 4 \pi R^2} \right)^{1/4}$$

Effektivtemperatur keine echte Temperatur, sondern quantifiziert Energieausstrahlung / Fläche

Dennoch:  $T_{eff}$  ist typische Temperatur der Sternatmosphäre

->  $T_{eff}$  ist der wichtigste Sternparameter, der aus der Analyse des Sternlichts gewonnen werden kann ...

## 6.2. Sternklassifikation

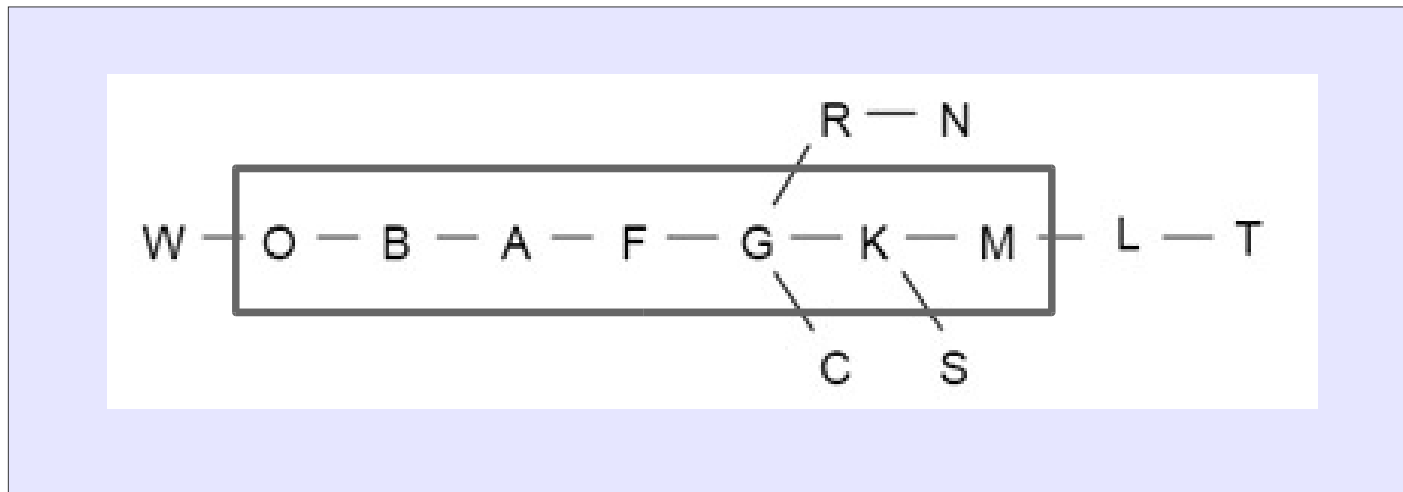
### Spektral-Klassifikation

nach Edward **Pickering** (1846-1919), Wilhelmina **Fleming** (1857-1911)  
& Annie **Cannon** (1863-1941)

#### -> **Harvard-Klassifikation von Sternspektren:**

ein-dimensionale Sequenz von **Spektren**,  
korreliert mit **Sternfarbe**, **Farb-Index**, also **Temperatur**

Basis des **Henry-Draper Catalog** (1880-1925):  
Untersuchung von 225.000 Sternen



## 6.2. Sternklassifikation

### Spektral-Klassifikation

-> Spektraltyp SpT, absolute visuelle Magnitude, Farbindex, Effektiv-Temperatur, Farb-Temperatur, Bolometrische Korrektur, bolometrische Magnitude typischer Sterne

SpT	$M_V$	B-V	U-B	$T_{\text{eff}}$	$T_c$	B.C.	$M_{\text{Bol}}$
O5	-6	-0.45	-1.2	35 000	70 000	4.6	-10.6
B0	-3.7	-0.31	-1.07	21 000	38 000	3.0	-6.7
B5	-0.9	-0.17	-0.56	13 500	23 000	1.6	-2.5
A0	+0.7	0.00	0.00	9 700	15 400	0.68	0.0
A5	+2.0	+0.16	+0.09	8 100	11 100	0.30	+1.7
F0	+2.8	+0.30	+0.02	7 200	9 000	0.10	+2.7
F5	+3.8	+0.45	-0.01	6 500	7 600	0.00	+3.8
G0	+4.6	+0.57	+0.04	6 000	6 700	0.03	+4.6
G5	+5.2	+0.70	+0.20	5 400	6 000	0.10	+5.1
K0	+6.0	+0.84	+0.46	4 700	5 400	0.20	+5.8
K5	+7.4	+1.11	+1.06	4 000	4 500	0.58	+6.8
M0	+8.9	+1.39	+1.24	3 300	3 800	1.20	+7.6
M5	+12.0	+1.61	+1.19	2 600	3 000	2.1	+9.8

(Aus: Scheffler/Elsässer Physik der Sterne und der Sonne)

## 6.2. Sternklassifikation

### Leuchtkraftklasse:

Sterne gleicher Spektralklasse (Sp) können verschiedene Leuchtkraft haben

-> **Leuchtkraftklasse (LC)**

-> MK-Klassifikation (Morgan & Keenan)

-> Grund: Radius der Sterne:

$$L = 4 \pi R^2 F$$

$$F = \sigma_{SB} T^4$$

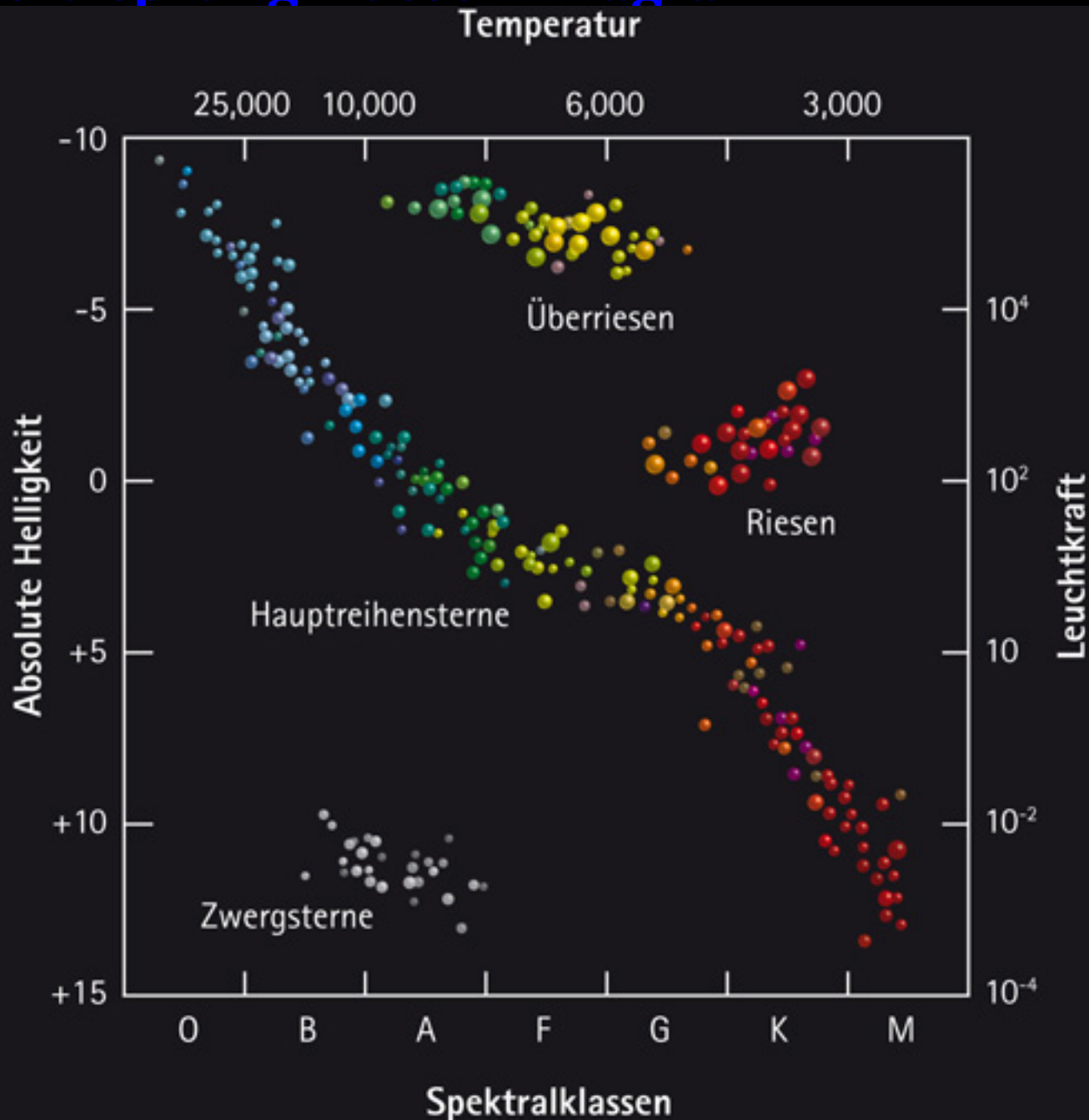
**Klassen:** I = Überriesen, II = helle Riesen, III = Riesen,  
IV = Unterriesen, V = Zwergsterne, VI = Unterzwerge

Tab. 3.5.3. Die MK – Leuchtkraftklassen [Kaler, 1994]

(\* selten)

MK - Klasse	Beschreibung	Absolute Helligkeit		
		B0	F0	M0
0 (null)	Die allerhellsten Überriesen in den Mangellanschen Wolken* und der Milchstrasse		-9	
Ia	helle Überriesen	-6,7	-8,2	-7,5
Ib	weniger helle Überriesen	-6,1	-4,7	-4,6
II	helle Riesen	-5,4	-2,3	-2,3
III	normale Riesen	-5,0	1,2	-0,4
IV	Unterriesen	-4,7	2,0	
V	Hauptreihe	-4,1	2,6	9,0
Sd (VI*)	Unterzwerge			10
D, wd (VII*)	Weisse Zwerge	10,2	12,9	

## 6.3. Hertzsprung-Russell-Diagramm



# 9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

## 9.1 Weitere Sternparameter

- > Sternradius
- > Massenbestimmung, Doppelsterne
- > Masse-Leuchtkraft-Beziehung
- > Chemische Häufigkeit, “Metallizität”

nicht: Alter, Rotation, Multiplizität, ...



# 9.1. Weitere Sternparameter

**Sternradius:** aus Leuchtkraft und Effektivtemperatur:

$$L = 4 \pi R^2 F = 4 \pi R^2 \sigma_{SB} T_{eff}^4$$

Im Verhältnis zur Sonne:

$$\log \frac{L}{L_o} = 2 \log \frac{R}{R_o} + 4 \log \frac{T_{eff}}{T_{eff,o}}$$

**Linien konstanten Radius im HRD sind gerade Linien im  $(\log L) - (\log T_{eff})$ - Diagramm**

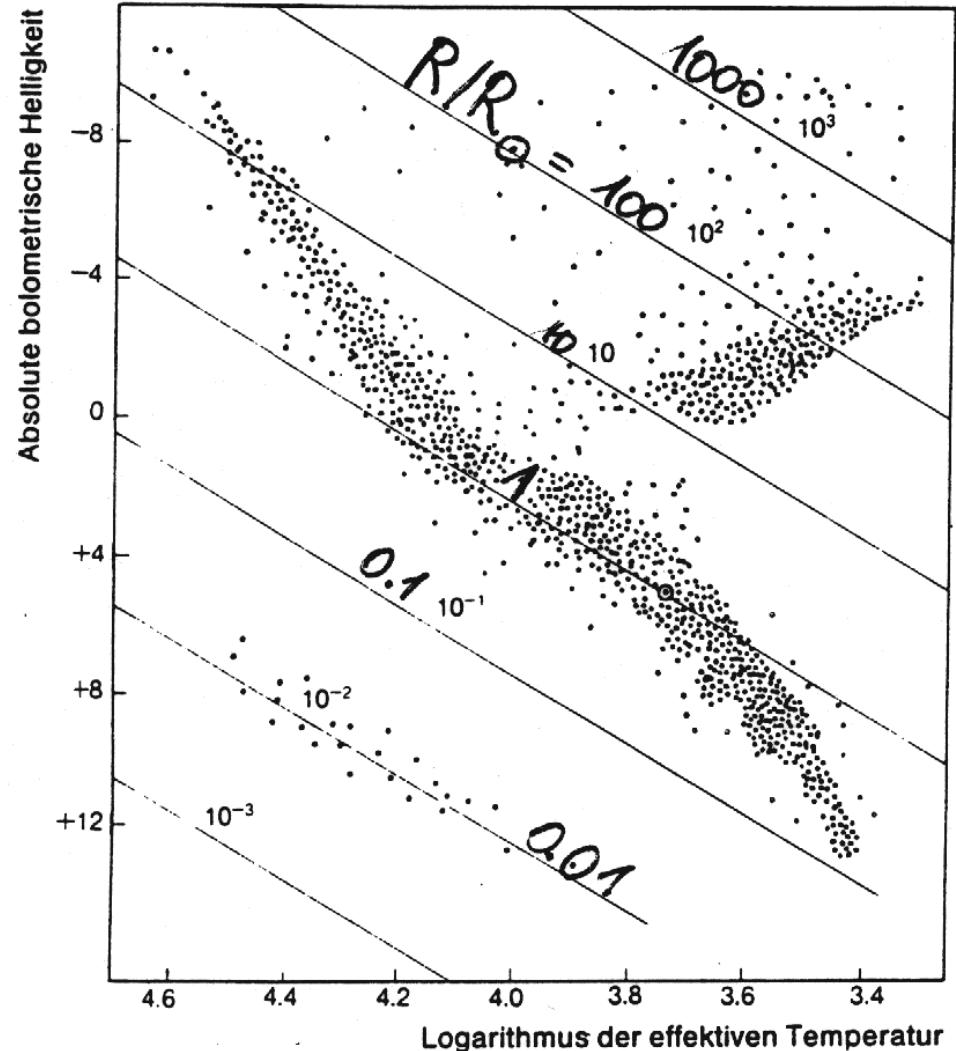
Übrigens:

Auch Umkehrschluß möglich:

"spektroskopische Parallaxe"

Spektraltyp, Leuchtkraft aus CMD:

-> Entfernung ("Parallaxe")



# 9.1. Weitere Sternparameter

## Stern-Masse

Stern-Parameter bisher: Leuchtkraft, Effektivtemperatur, Farbe, Radius, (Rotation),  
(Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche  $\log(g)$ ,  $g = GM/R^2$ )

-> **für weiteres Verständnis der Sternphysik  
ist die Sternmasse notwendig !!**

## Massenbestimmung bei Sternen:

- > Direkte astrometrische Bahnvermessung von **Binärsystemen**
- > Vergleich mit **Modellen zur Sternaufbau** und zur Sternentwicklung
- > Aus empirischer **Massen-Leuchtkraft-Beziehung**

# 9.1. Weitere Sternparameter

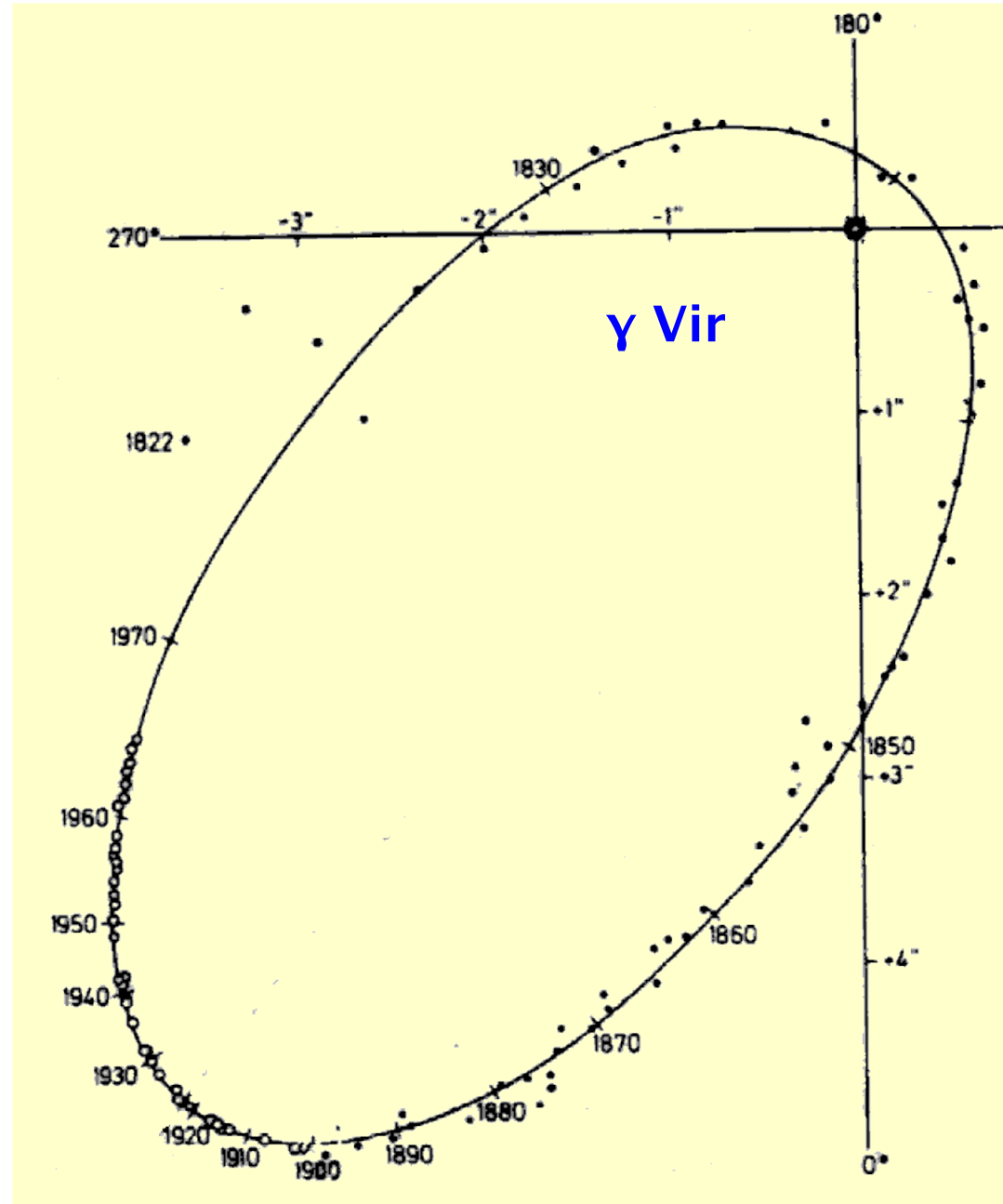
## Massenbestimmung in visuellen Doppelsternen:

Beide Komponenten  
(getrennt) sichtbar

- große Halbachse  $a$   
der relativen wahren Bahn
- bekannte Entfernung
- wahre Bahnhalbachsen  
um den Schwerpunkt  $a_1, a_2$
- Umlaufdauer  $P$

-> Kepler-Gesetze

-> Masse



# 9.1. Weitere Sternparameter

## Sterne umlaufen **Massenschwerpunkt** auf elliptischen Bahnen

### 3. Kepler-Gesetz:

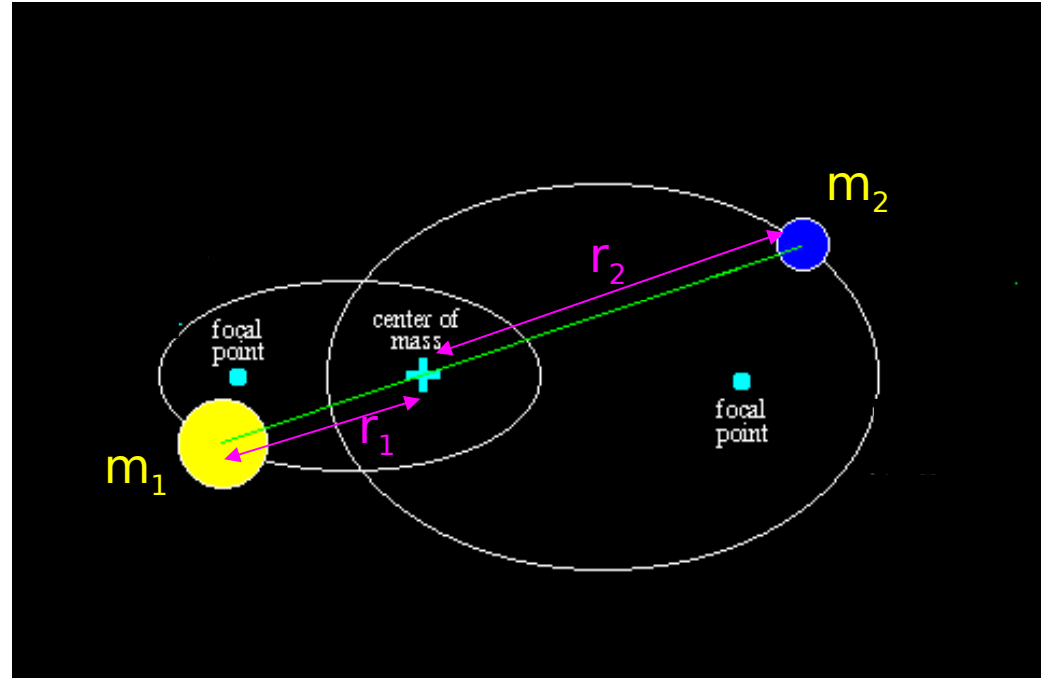
-> Massensummen:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2}$$

### Schwerpunktsatz:

-> Einzelmassen aus  
absoluten Bahnen:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1}$$



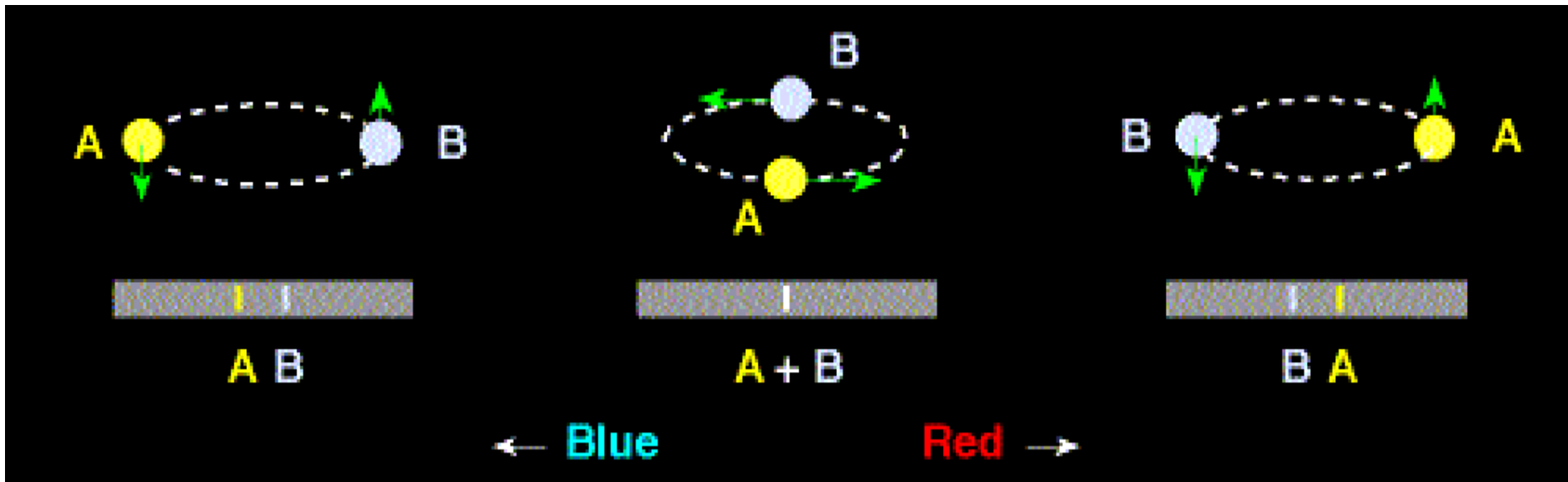
-> **Genaue Massenbestimmung** für beide Sterne möglich wenn:

- 1) Beide Sterne sichtbar: **visueller** Doppelstern
- 2) Winkelgeschwindigkeit hoch genug -> **Bahn** wird beobachtet
- 3) **Entfernung**  $D$  bekannt ->  $a = \alpha D$
- 4) Bahnebene senkrecht zur Sichtlinie, **Inklination**  $i=0$ ,  
( inklinierte Bahnebene -> Appendix )

# 9.1. Weitere Sternparameter

## Spektroskopische Doppelsterne

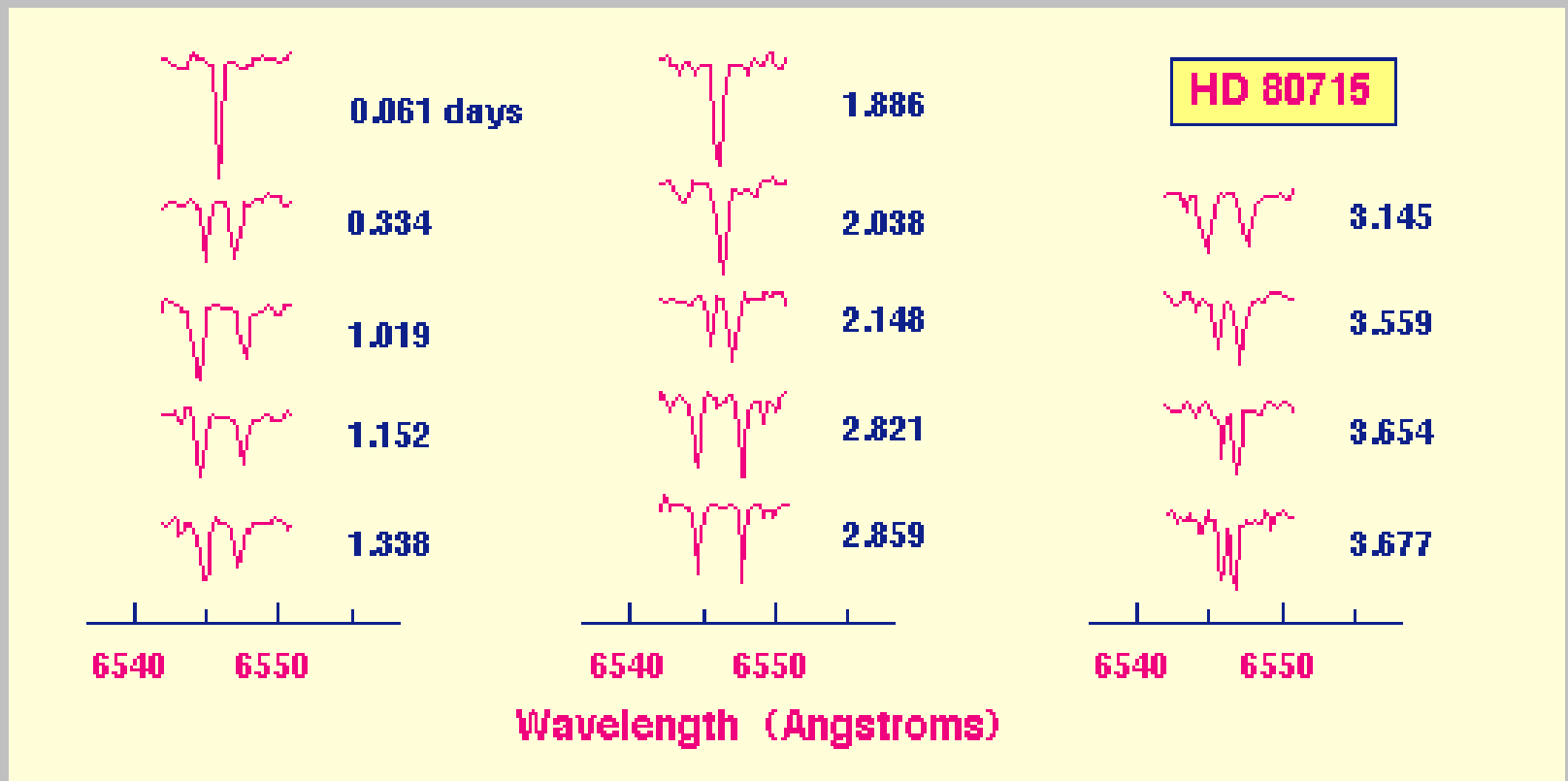
- = Sterne bei denen **Verdopplung der Spektrallinien** beobachtet wird,  
-> Periode  $P$ , Radialgeschwindigkeit  $v(t)$  (Dopplerverschiebung):
- > **Doppelsternsystem**, das räumlich nicht aufgelöst werden kann
  - > **Radialgeschwindigkeit** gibt **Keplergeschwindigkeit** des Sterns (oder der beiden Sterne)



# 9.1. Weitere Sternparameter

## Spektroskopische Doppelsterne

Beispiel HD 80715,  $P = 3.677$  d,  
Verdopplung der Absorptionslinien sichtbar



# 9.1. Weitere Sternparameter

## Spektroskopische Doppelsterne

- = Sterne bei denen **Verdopplung der Spektrallinien** beobachtet wird,  
-> Periode  $P$ , Radialgeschwindigkeit  $v(t)$  (Dopplerverschiebung):
- > **Doppelsternsystem**, das räumlich nicht aufgelöst werden kann
  - > **Radialgeschwindigkeit** zeigt projizierte **Keplergeschwindigkeit** des Sterns (oder der beiden Sterne)
  - > Berechnung von  $a_1 \sin(i)$  bzw. auch  $a_2 \sin(i)$

Aus **3. Kepler-Gesetz** folgt:

**Massenfunktion:**

$$f = \frac{m_2 \sin^3 i}{m_1 + m_2} = \frac{a^3 \sin^3 i}{P^2}$$

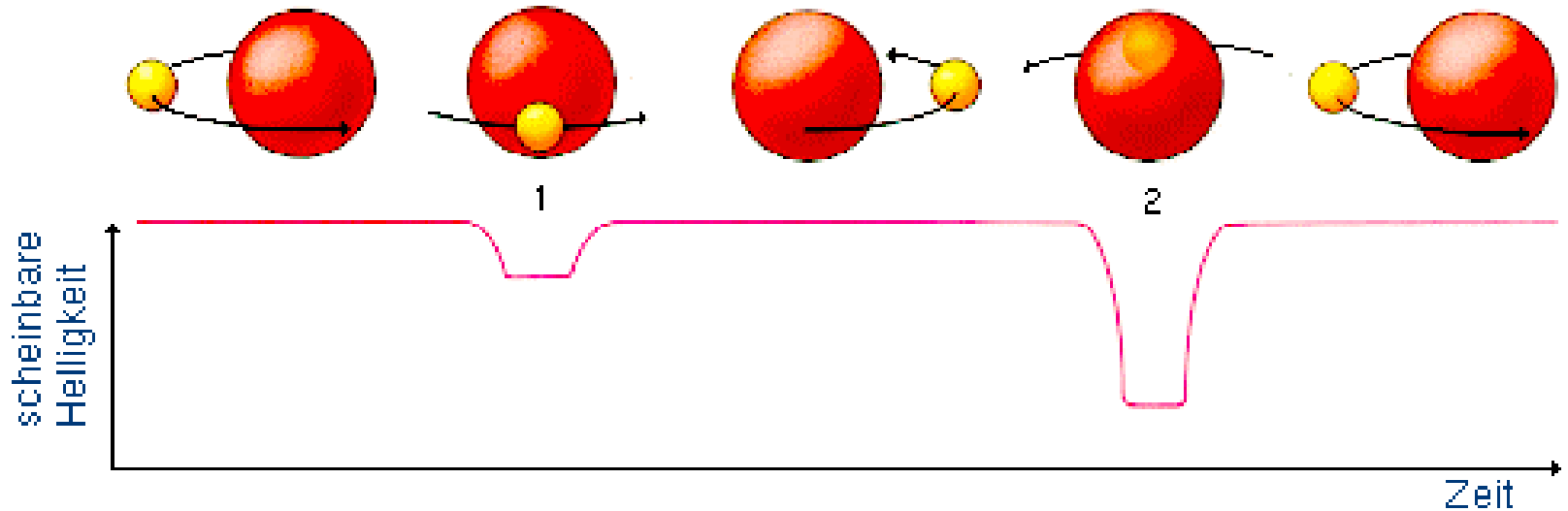
(falls nur ein Stern sichtbar)

**Massenverhältnis:**

$m_1/m_2$  kann abgeleitet werden, falls beide Sterne zu sehen sind

# 9.1. Weitere Sternparameter

## Bedeckungs-Doppelsterne



### Beobachtungsgrößen:

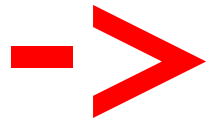
Umlaufperiode, Flächenverhältnisse der Sterne, Radialgeschwindigkeiten

-> Bei genauester Kenntnis von Lichtkurve und Radialgeschwindigkeiten:  
durch **Modellierung** können alle Systemparameter bestimmt werden

-> Sternmassen



## 9.1. Weitere Sternparameter



**Empirische**

**Masse-Leuchtkraft-**

**Beziehung**

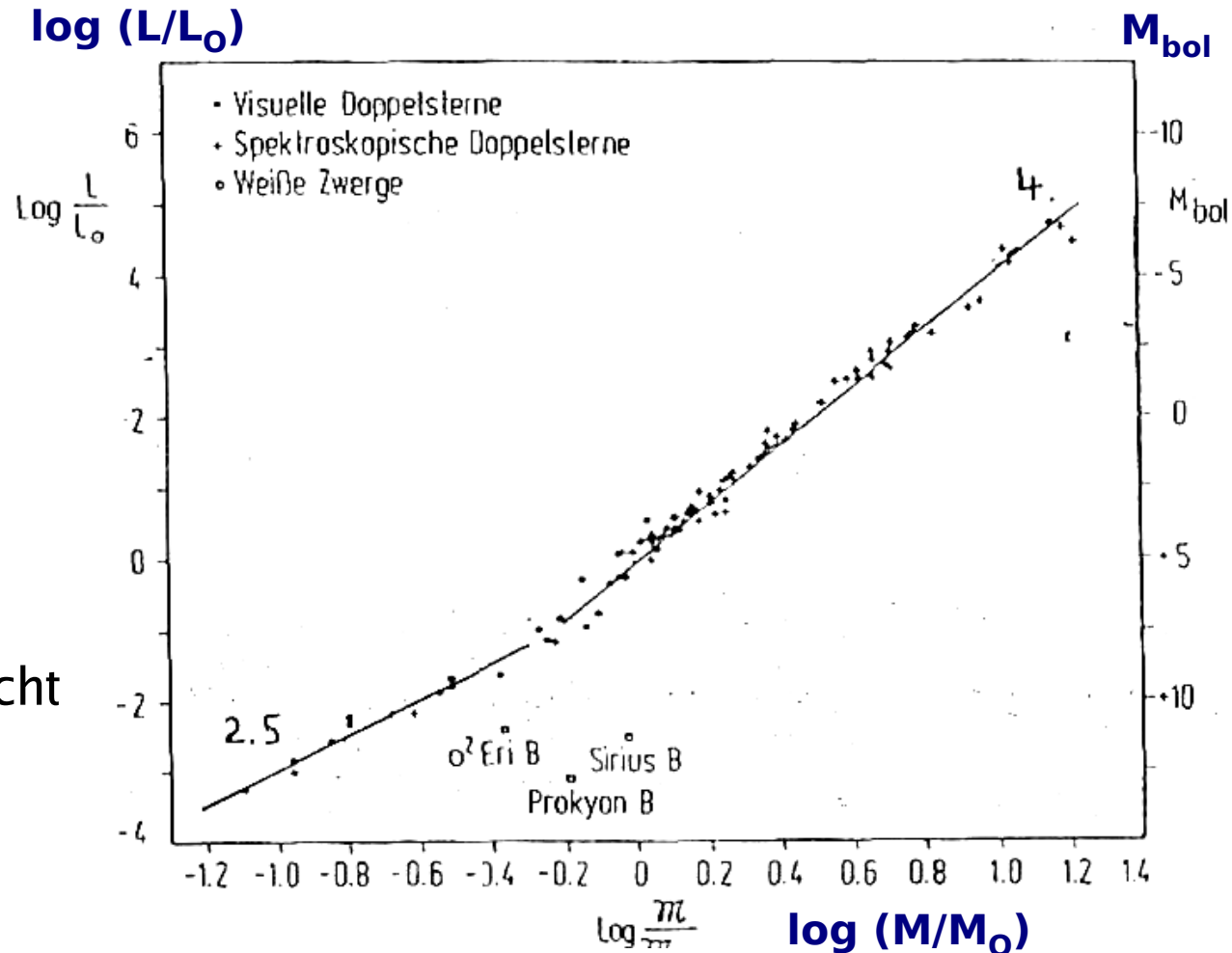
# 9.1. Weitere Sternparameter

## Empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung

Beobachtungsdaten (1980):

Beste Massen-  
bestimmungen aus  
26 visuellen  
Doppelsternen,  
93 Bedeckungs-  
veränderlichen,  
4 spektroskopischen  
Doppelsternen

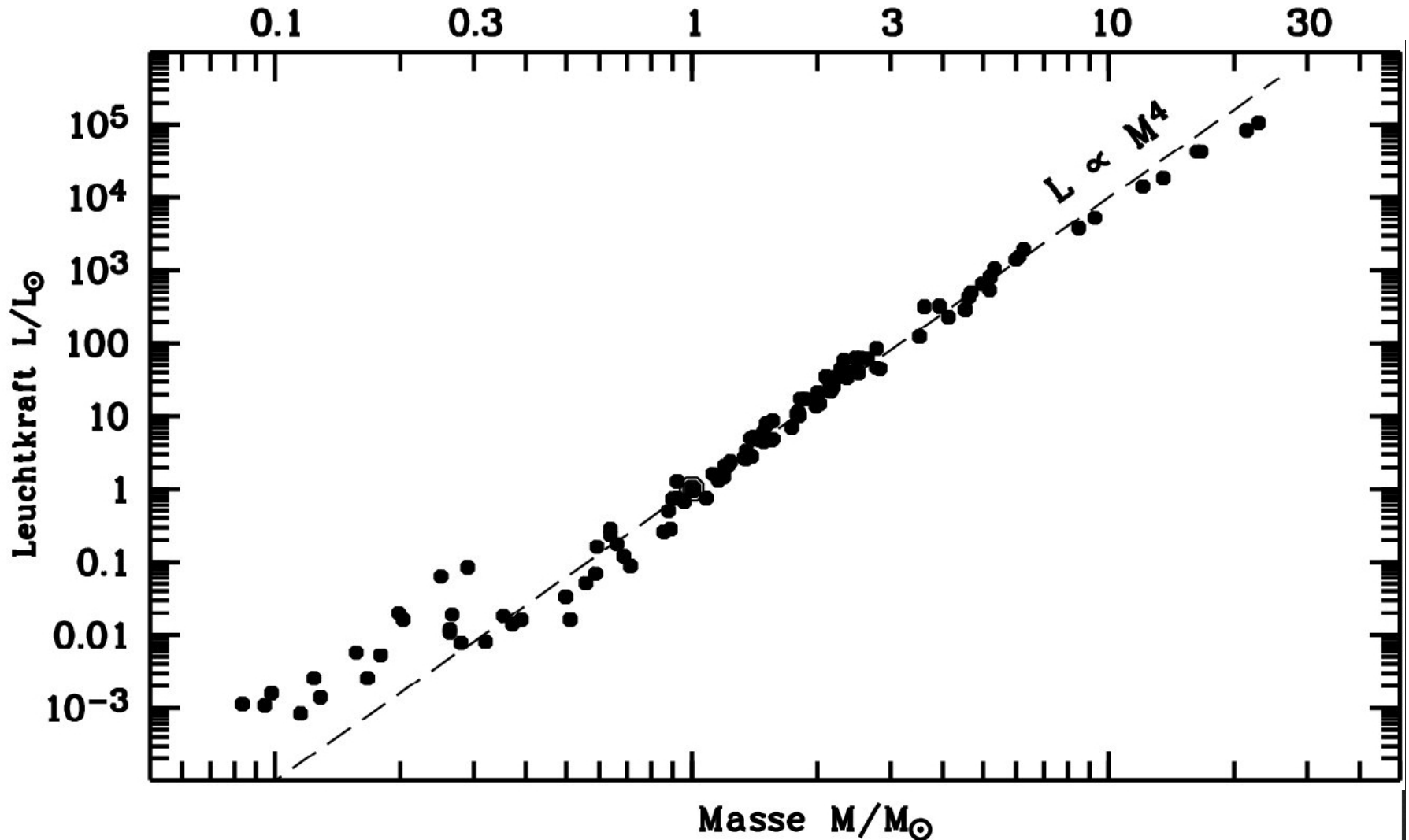
“Weiße Zwerge”  
weichen ab, liegen nicht  
auf der Hauptreihe



## 9.1. Weitere Sternparameter

# Empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung

Neuere Version:



## 9.1. Weitere Sternparameter

### Empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung

In erster Näherung:

$$L \propto M^3$$

Bessere Approximation:

$$L \propto M^{2.5} \quad \left[ M < 1/2 M_{\odot} \right]$$

$$L \propto M^{3.8} \quad \left[ M > 1/2 M_{\odot} \right]$$

-> Diese Beziehungen sind durch die Physik der **Sternaufbaus** und der **Sternentwicklung** bestimmt (kommt später...)

-> **Massereichere Sterne “leben” kürzer:**

Übungsaufgabe

-> **Fundamentale Beziehung zum Verständnis der leuchtenden Materie im Universum**

# 9.1. Weitere Sternparameter

## Metallizität Z: Maß für chemische Häufigkeiten

Notation der Astronomen: H, He, Rest = "Metalle", (manchmal C,N,O)

Metallizität = "Metall"gehalt pro Einheitsvolumen

$$Z = \frac{m_Z n_Z}{\sum_i m_i n_i}$$

$i = X, Y, Z$   
 $m_i$  = mittlere Masse von H (X), He (Y), "Metall" (Z)  
 $m_Z = 16.5$

X,Y,Z werden als Abkürzungen für Massenanteile verwendet

Typisches Anzahlverhältnis:  $n_H : n_{He} : n_{Metall} = 1000 : 90 : 1$

## Massenverhältnisse:

Typische stellare **Population I** in der Scheibe der Milchstraße:

$$X : Y : Z = 0.73 : 0.25 : 0.02$$

Stellare **Population II**: niedrigere Metallizität (-> ältere Sterne)

**Sonnensystem**:  $X : Y : Z = 0.706 : 0.275 : 0.019$

Lokales interstellares Material: ähnlich

# 9.1. Weitere Sternparameter

## Metallizität in Sternatmosphären:

-> Messung der **Elementhäufigkeiten** aus Linienstärken (“Wachstumskurve”)

Oft Angabe der **Häufigkeiten relativ zum Wert der Sonne:**

Relative Helium-/Wasserstoff-  
Häufigkeit (im Vgl. zur Sonne):  $[\epsilon_{He}] \equiv \log \frac{(n_{He}/n_H)}{(n_{He}/n_H)_{Sonne}}$

Relative Sauerstoff-/ Eisen-  
Häufigkeit (im Vgl. z. Sonne):  $[O/Fe] \equiv \log \frac{(n_O/n_{Fe})}{(n_O/n_{Fe})_{Sonne}}$

**Beispiele:** Metallarmer Stern:  $[Fe/H] < -1$   
Metallreicher Stern:  $[Fe/H] > -1$

**“Metalle”** sind wichtig für die Stärke  
des **Absorptionskoeffizienten**

# 9.1. Weitere Sternparameter

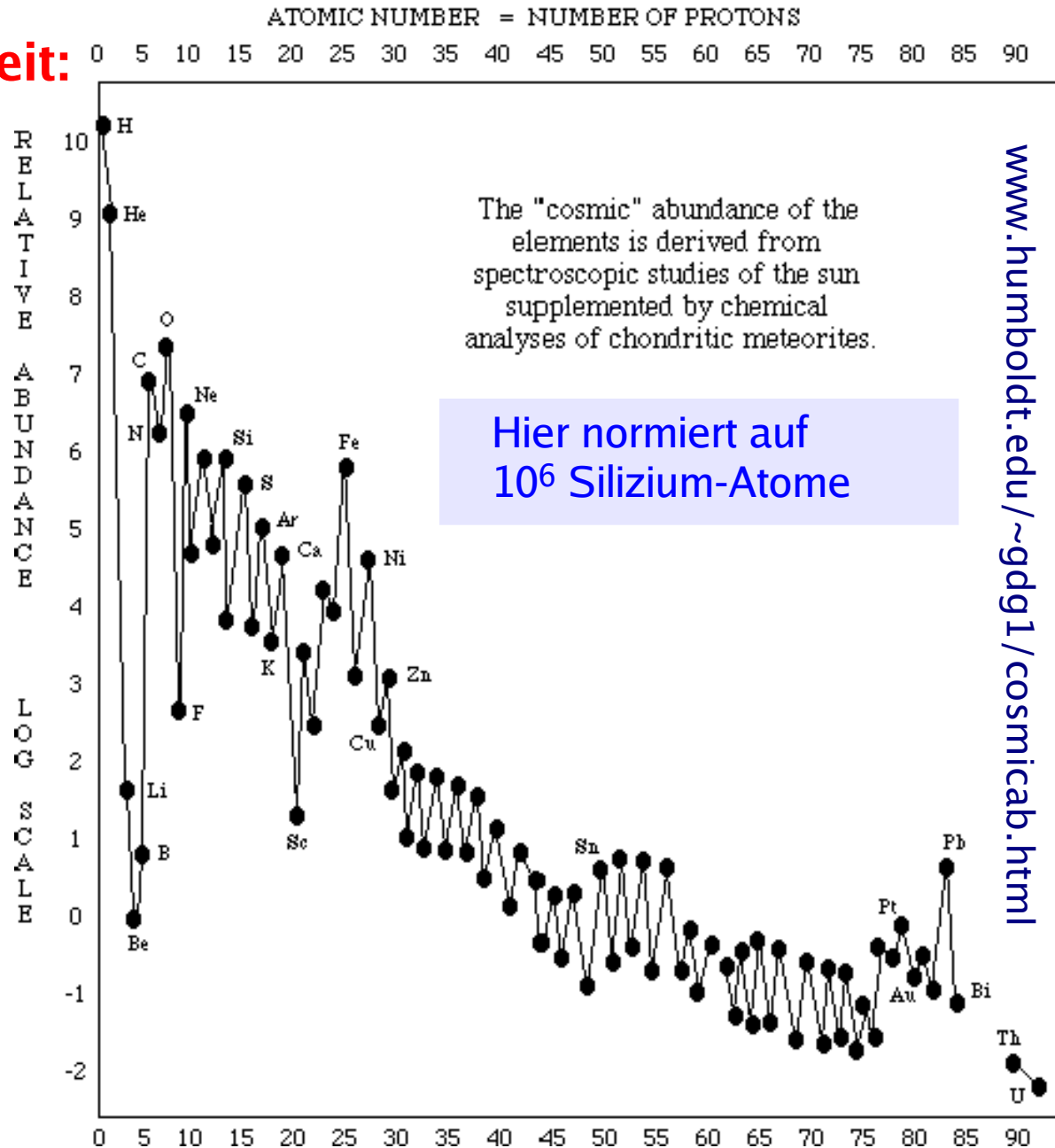
## “Kosmische” Häufigkeit:

Verteilung der relativen chemischen Häufigkeiten

“Kosmische” Häufigkeit ist diejenige im Sonnensystem (also nicht die irdische)

Meßgrundlage:

- Sonnenspektroskopie
- Analyse v. Chondriten



# 9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

## 9.2 Die Sonne

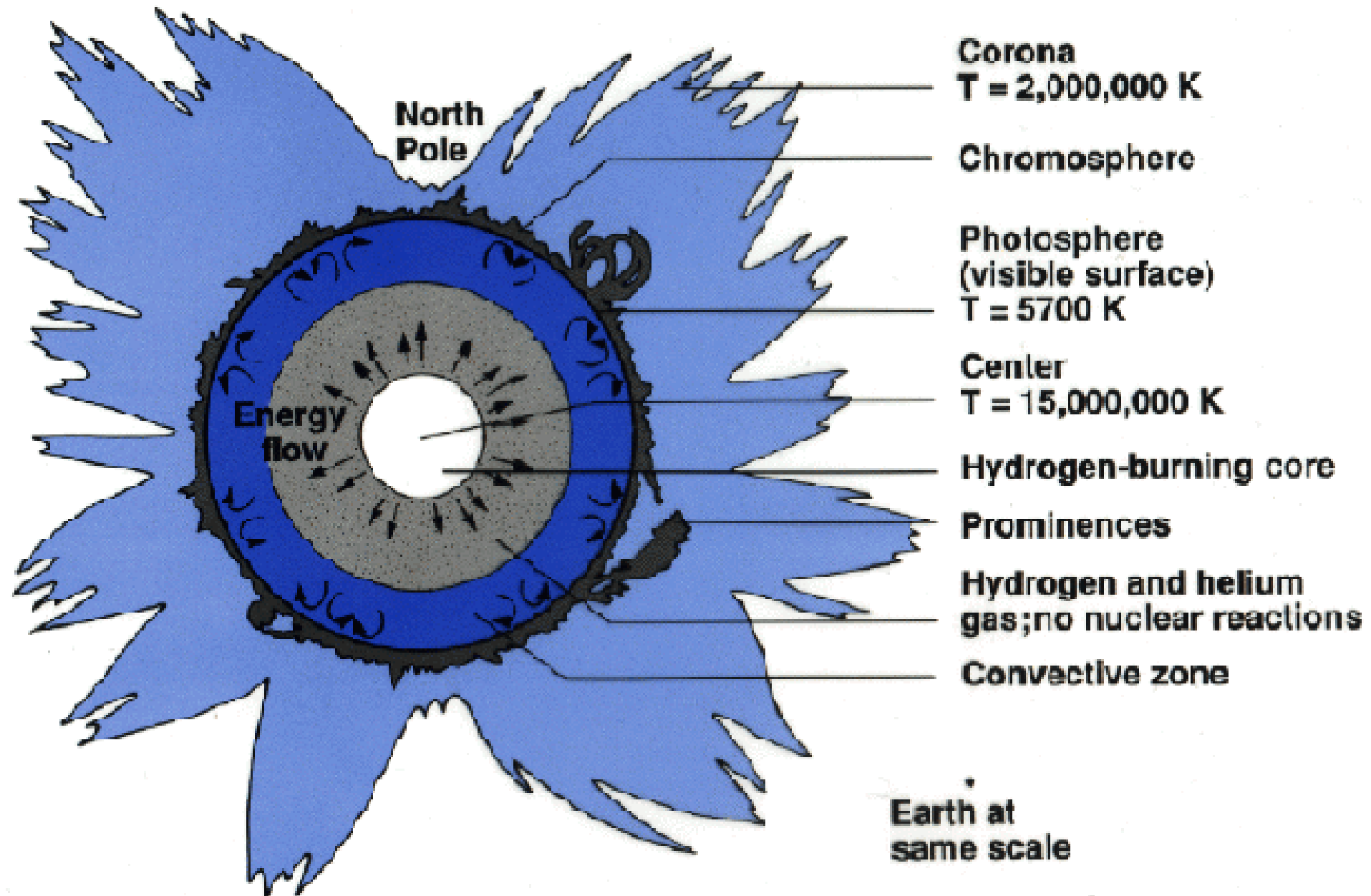
- > Daten
- > Innere und äußere Struktur
- > Aktivität
- > Äußerer Aufbau



## 9.2. Die Sonne

<b>Die Sonne als Stern:</b>	
Durchmesser (Photosphäre)	1 391 980 km
Masse	$1.99 \times 10^{33}$ g
Mittlere Dichte	1.41 g/cm <sup>3</sup>
Leuchtkraft	$3.83 \times 10^{33}$ erg/s
Rotationsperiode	25 Tage (Äquator)
Oberflächentemp. (effektiv)	5800 K
Spektralklasse	G2 V
Scheinbare Helligkeit	-26.7 mag
Absolute Helligkeit	4.8 mag
Mittlere Entfernung zur Erde	149 597 892 km = 1 AE

## 9.2. Die Sonne



## 9.2. Die Sonne

### Aufbau der Sonne:

#### Korona:

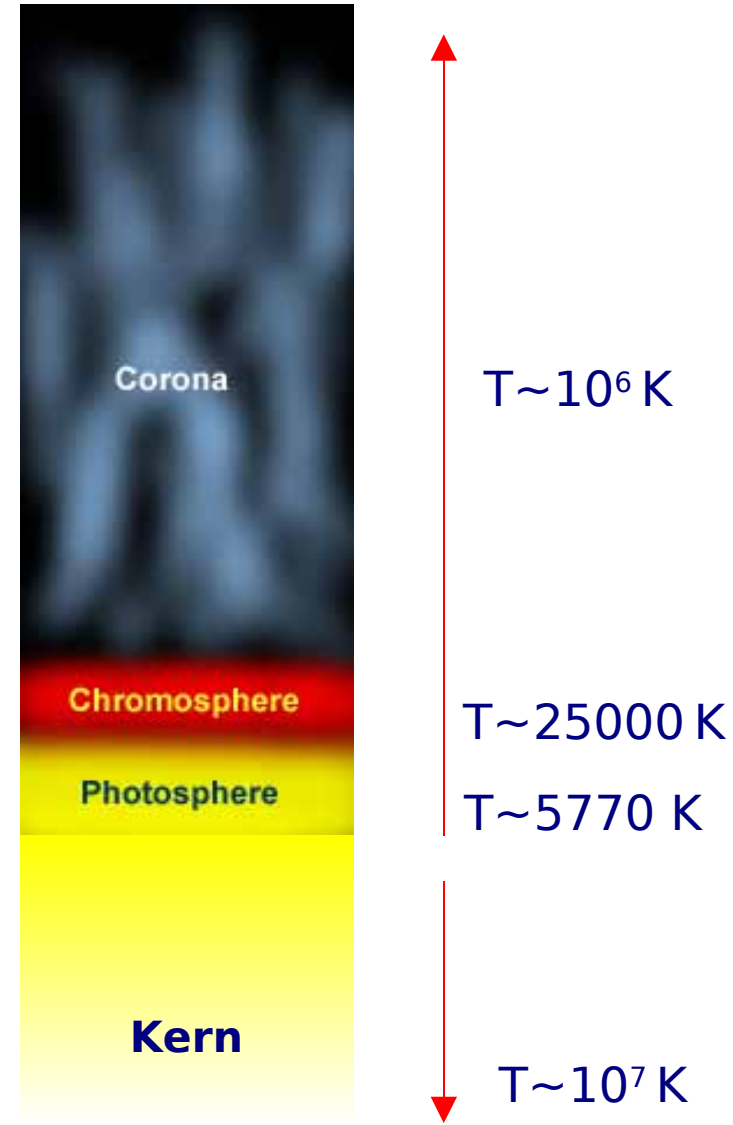
geringe Dichte, Temperatur  $\sim$  Mio K,  
Quelle des Sonnenwindes

#### Chromosphäre:

Temperaturschichtung: von 4300 K, bei  
500 km Höhe bis 500000 K nahe Korona

#### Photosphäre:

leuchtkräftige, strahlende obere Schicht,  
= **Sonnen-"Oberfläche"** ( $\tau \approx 1$ ), ca. 5800 K,  
mehrere 100 km dick, granulierte Struktur  
von 1500 km langen Elementen, durch  
konvektiven Energietransport



Grund des **Temperaturanstiegs ??** Druckwellen, Alfvenwellen ??

## 9.2. Die Sonne

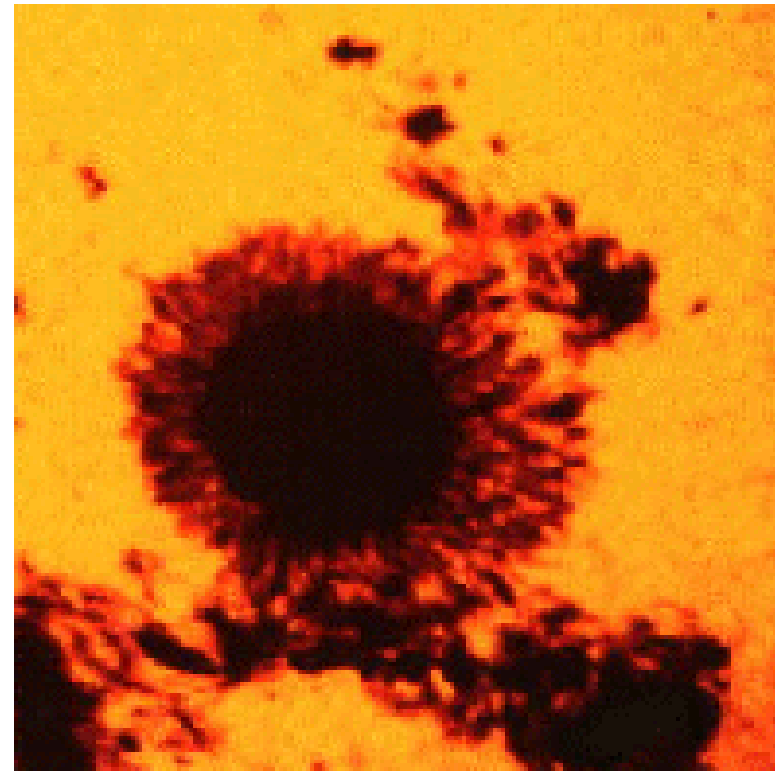
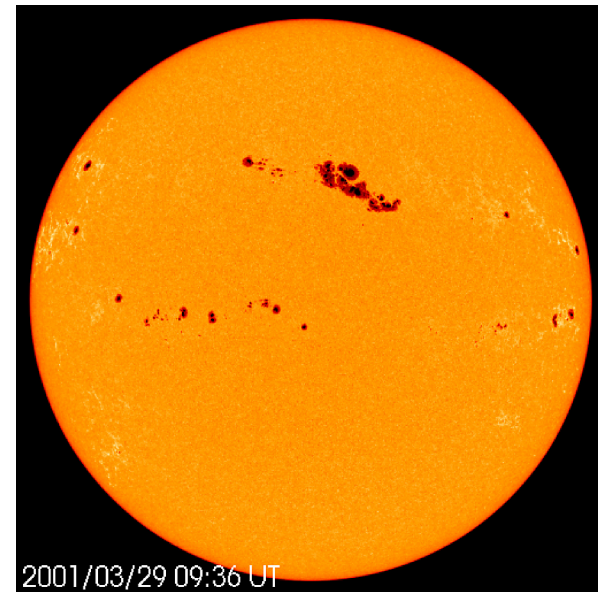
### Sonnenflecken

Ältestes bekanntes Phänomen auf  
Sonnenoberfläche ~ 50000km Durchmesser:

- > Auftreten in Einzelflecken / Fleckengruppen
- > Dunkles Zentrum: Umbra  
Hellere Randgebiete: Penumbra

Sonnenflecken sind Resultat der  
**magnetischen Sonnenaktivität:**

- > Wechselwirkung zwischen  
Materie & Magnetfeld (< 4000 G)
- > 11-Jahres-Zyklus in der Polaritäts-  
richtung: Hinweise auf 22-Jahres-  
zyklus des **Sonnendynamos**



## 9.2. Die Sonne

### Sonnenflecken

Flecken sind kälter als Umgebung

- > dunkler
- > Fleck < 4000K, Photosphäre ~5800 K
- > bipolare Anordnung

### Magnetische Flußröhren

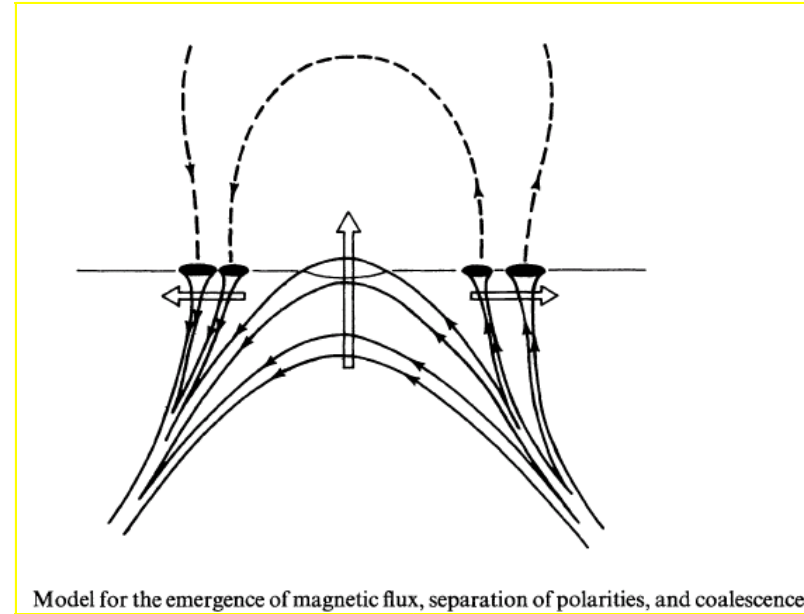
-> Druckgleichgewicht im Gas:

$$P_{\text{Fleck}} + \frac{B^2}{8\pi} = P_{\text{Röhre}} + \frac{B^2}{8\pi} = P_{\text{Extern}}$$

-> nur erreichbar, wenn:

$$T_{\text{Fleck}} < T_{\text{extern}} \quad \text{mit } P_{\text{Gas}} \sim nk_B T$$

Starke Magnetfelder verhindern Kühlung durch Konvektiven Strahlungstransport



Model for the emergence of magnetic flux, separation of polarities, and coalescence

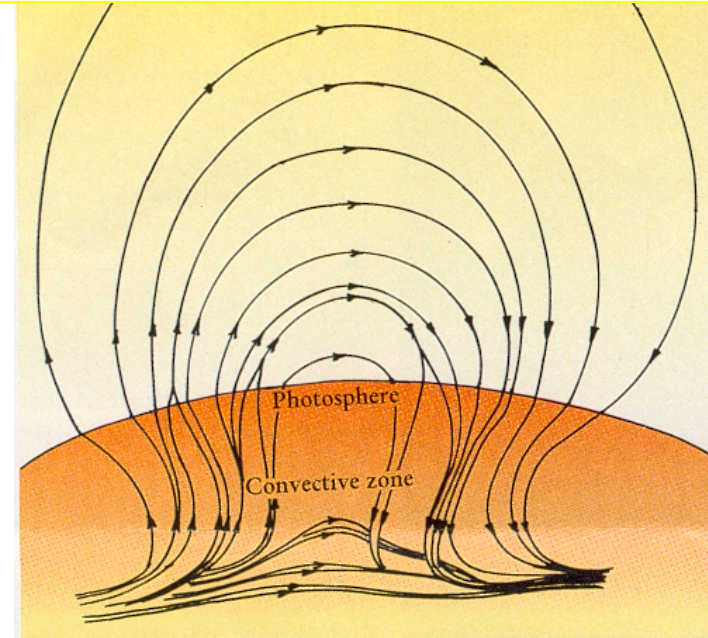


FIGURE 2. LARGE-SCALE STRUCTURE of a bipolar magnetic field, formed by the successive emergence of  $\Omega$  loops from the general azimuthal field at the base of the Sun's convective zone.

## 9.2. Die Sonne

### Protuberanzen, Filamente, Fackeln (“Flares”)

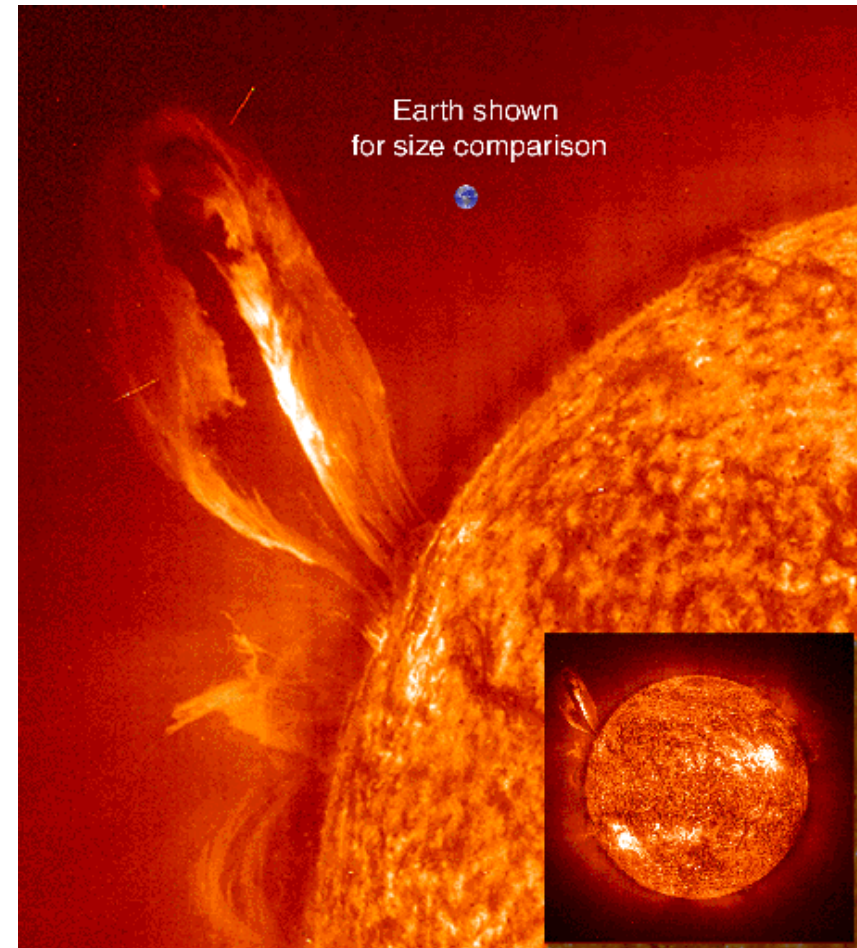
Einschluß von Gas im Magnetfeld, Aufsteigen magnetischer Bögen

Auch kleinere Protuberanzen werden beobachtet (Dauer ~ Monat)

Sonnenaktivität:

- > Polarlichter
- > Radio-Störungen auf der Erde

Große **Protuberanz**, beobachtet  
im He II -Licht (304Å),  
24. Juli 24, 1999,  
größer als 35 Erdradien



## 9.2. Die Sonne

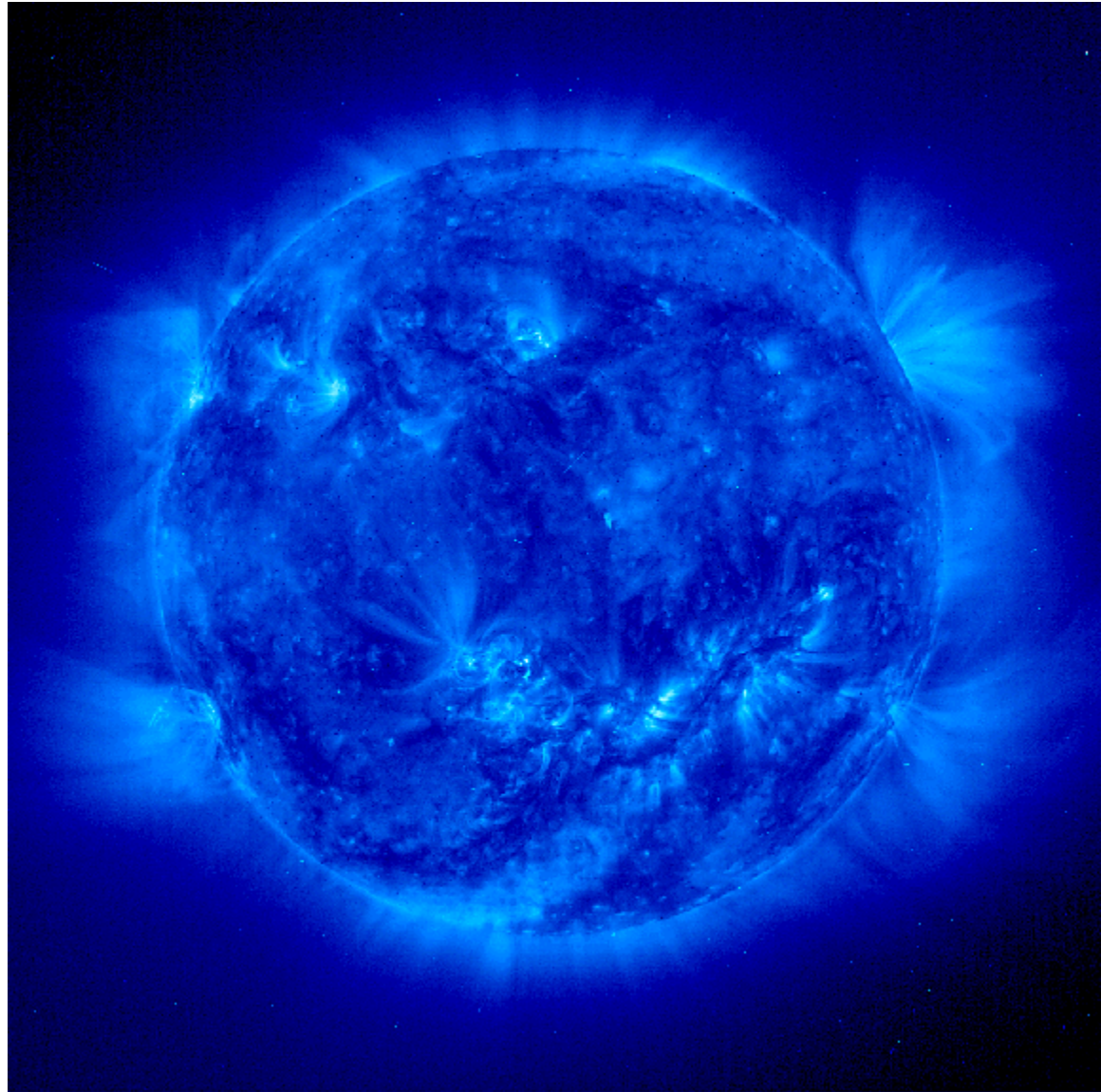
### Aktivität auf allen Wellenlängen

Aktive Sonnenoberfläche  
und magnetische Bögen  
beobachtet mit dem  
SOHO-Satelliten im

fernen UV:

Eisenlinie Fe IX/X 171Å

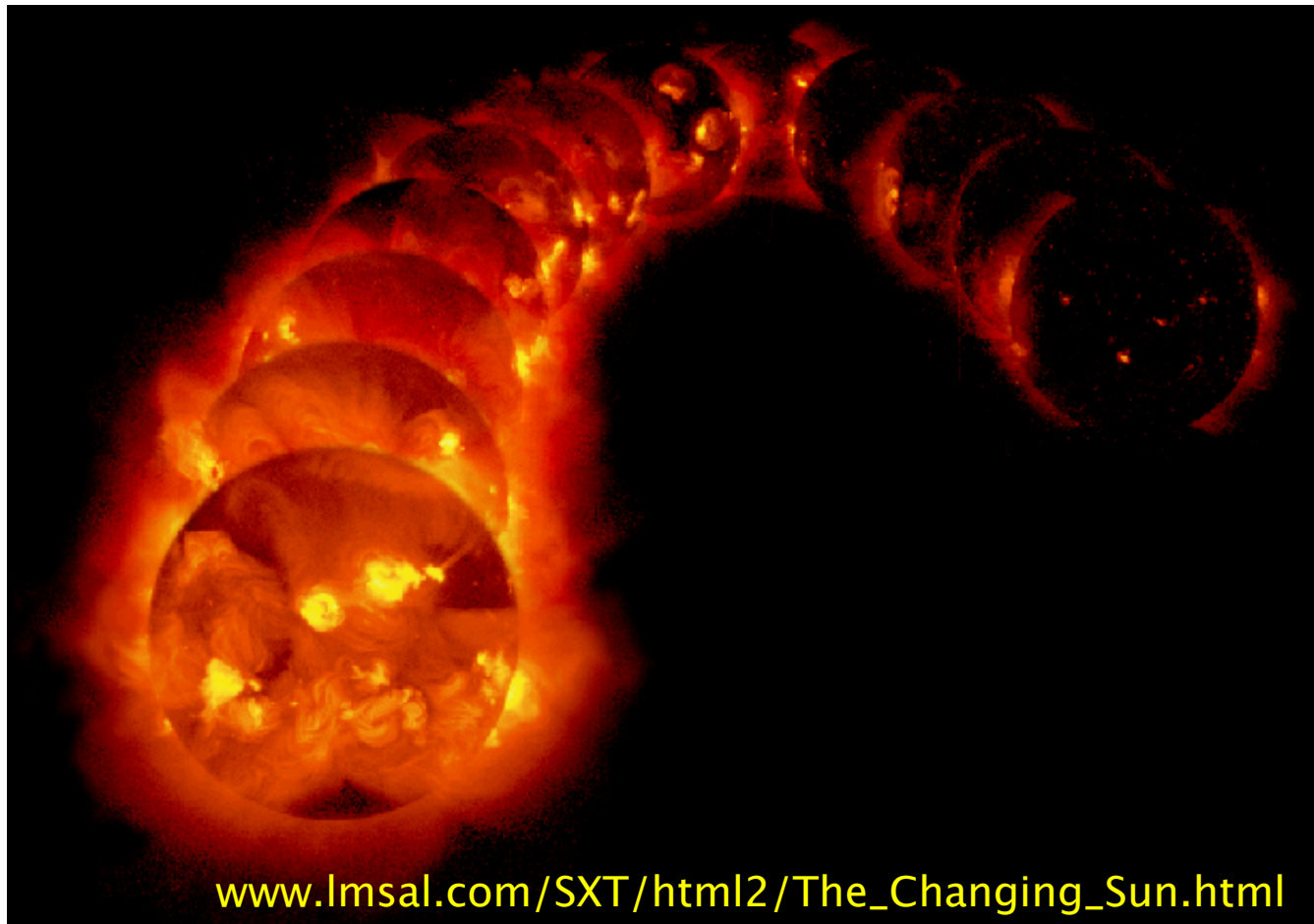
-> Strahlung entsteht in  
der unteren Korona  
bei Temperaturen  
von ~Mio K



## 9.2. Die Sonne

### Zeitliche Entwicklung der Aktivität

Entwicklung der Sonnen-Korona über einen Sonnenzyklus  
Beobachtet mit dem Yohkoh-ISAS-Satelliten im **Röntgen-Bereich**



[www.lmsal.com/SXT/html2/The\\_Changing\\_Sun.html](http://www.lmsal.com/SXT/html2/The_Changing_Sun.html)



# 9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

## 9.3 Sternaufbau

- > Problemstellung, Arbeitshypothesen
- > Planparalleles Atmosphärenmodell
- > Sternaufbau-Gleichungen, Näherungen
- > Strahlungsdruck

## 9.3. Sternaufbau

### Problemstellung:

Sternstruktur?

Energieerzeugung/ -transport?

Zeitliche Entwicklung der Sterne?

-> **Ziel:** Verständnis der empirischen Beziehungen (z.B. M-L)  
aus physikalischen Gesetzen

-> Physikalische Beziehung zwischen:

- globalen Größen (Beobachtung): Masse  $M$ , Radius  $R$ , Leuchtkraft  $L$   
und
- lokalen Größen (innerer Aufbau): Temperatur  $T$ , Dichte  $\rho$ , Druck  $P$

-> Vergleich Theorie / Beobachtung:

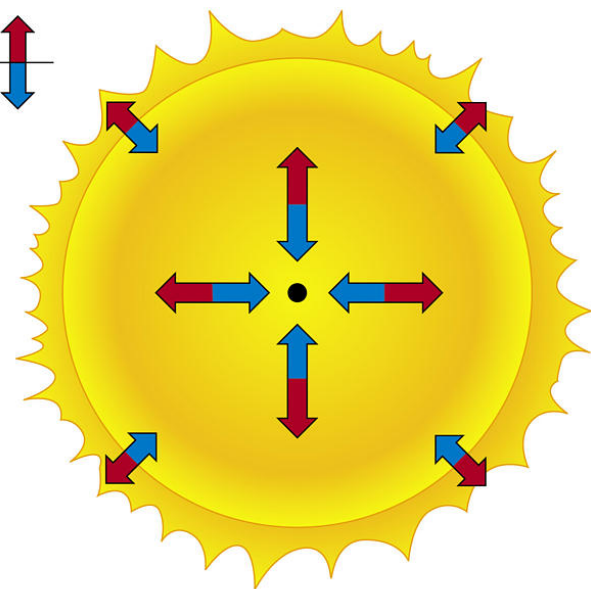
- Spektralklassen, Leuchtkraftklassen
- HRD: Hauptreihe, Riesenäste, Zwergsterne
- empirische Masse-Leuchtkraft-Beziehung

## 9.3. Sternaufbau

### Arbeitshypothesen:

- 1) Sterne sind **Gaskugeln**, durch **Eigen-Gravitation** gebunden
  - 2) Sterne befinden sich nahe eines **Gleichgewichtszustandes** (= Hauptreihe des HRD )
  - 3) Energieverluste durch Strahlung:
    - > **Entwicklung** auf **langer Zeitskala**
    - > angenähert durch Reihe von Gleichgewichtszuständen
- > Löse **Erhaltungsgleichungen** von Masse, Impuls, & Energie,  
-> diese vektornüpfen lokale und globale Größen

Pressure  
out  
Gravity  
in

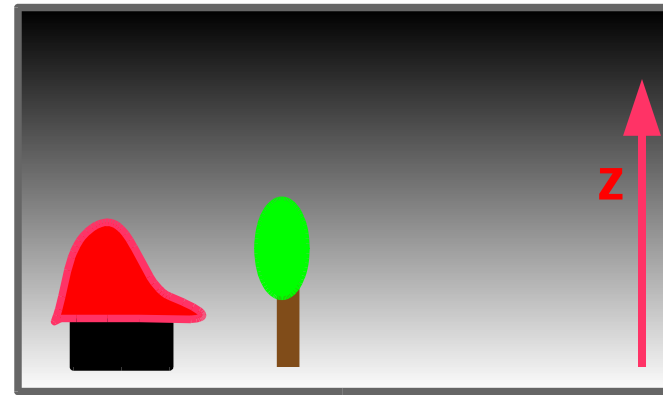


Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

## 9.3. Sternaufbau

### Planparalleles Atmosphärenmodell:

-> Sterne, (Planeten)



### Vertikales hydrostatisches Gleichgewicht:

-> genügend Druck, um darüberliegende Schichten zu tragen

**Gravitationskraft** (g konstant):  $\vec{F}_G = -\frac{GM}{R^2} \vec{e}_z = -g \vec{e}_z$

**Druckkraft** (pro Einheitsfläche = Druck):

$$\frac{dP}{dz} = -g \rho(z) \rightarrow P(z) = g \int_z^\infty \rho(z') dz'$$

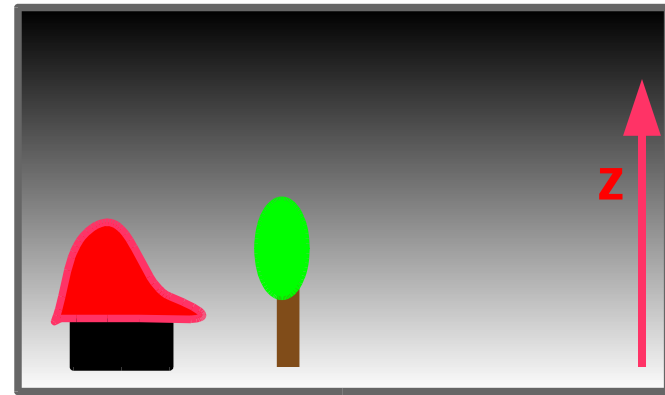
Mit idealem Gas:  $P = \rho k_B T / m$

also: 
$$T(z) \frac{d\rho(z)}{dz} + \rho \frac{dT(z)}{dz} = -\rho(z) \frac{gm}{k_B}$$

## 9.3. Sternaufbau

### Planparalleles Atmosphärenmodell:

-> Sterne, (Planeten)



### Vertikales hydrostatisches Gleichgewicht:

-> genügend Druck, um darüberliegende Schichten zu tragen

$$T(z) \frac{d\rho(z)}{dz} + \rho \frac{dT(z)}{dz} = -\rho(z) \frac{gm}{k_B}$$

Annahme **konstante Temperatur**: Lösung:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right), \quad \text{mit Druckskalenhöhe } H \equiv \frac{k_B T}{gm}$$

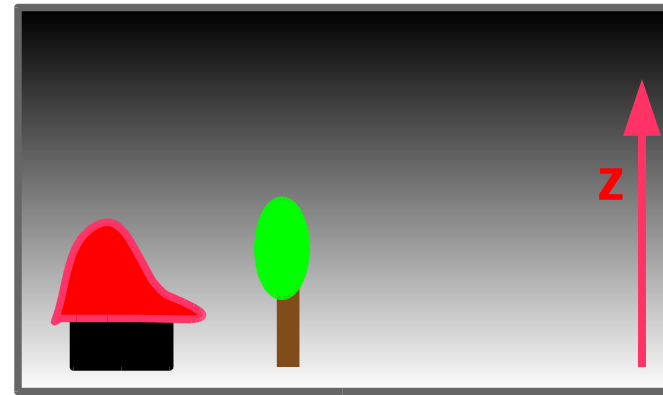
Annahme **KEINE** konstante Temperatur: "Druckskalenhöhe"  $H(z) \equiv \frac{k_B T(z)}{gm}$

**numerische Lösung auf dem Computer!**

## 9.3. Sternaufbau

Planparalleles Atmosphärenmodell:

-> Sterne, (Planeten)



Was bestimmt die Temperaturverteilung?

$T(z)$  wird im Stern von komplizierten Prozessen bestimmt, u.a.:

- Energietransport durch **Strahlung** (Strahlungstransport)
- Energietransport durch **Konvektion**
- Heizung durch **Stoßwellen**
- Heizung durch “magnetische **Rekonnektion**”
- **Wärmeleitung**
- ggfs. externe **Anstrahlung** (Heizung)
- usw

Manche Prozesse für Sterne nicht genau verstanden

## 9.3. Sternaufbau

### Grundgleichungen:

hier: kurze Diskussion (Ableitungen -> Vorlesung “Stellar Physics”)

1) **Massenerhaltung:**  $M(r)$  = Masse innerhalb Radius  $r$

2) **Impulserhaltung (linear):**  $P(r)$ , Kräfte (radial), Strahlungsdruck

3) **Energieerhaltung:** Energiefluß/-transport durch den Stern:  $L(r)$

Strahlungsdiffusion, Konvektion, (Energieerzeugung)

-> **Allgemeine Lösung des Gleichungssystems auf dem Computer**

-> Einfache Lösungen: Lane-Emden: “polytrope Gaskugeln”

-> Abschätzungen

## 9.3. Sternaufbau

**Überblick: Gleichungssystem:** kein Prüfungsstoff -> "Stellar Physics"

1) Satz abhängiger Variabler:

$$M, L, \rho, T; \epsilon, \kappa, P, e$$

2) Erhaltungsgleichungen:

Massenerhaltung:

$$\frac{\partial M(r)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho$$

Impulserhaltung (Kräfte):

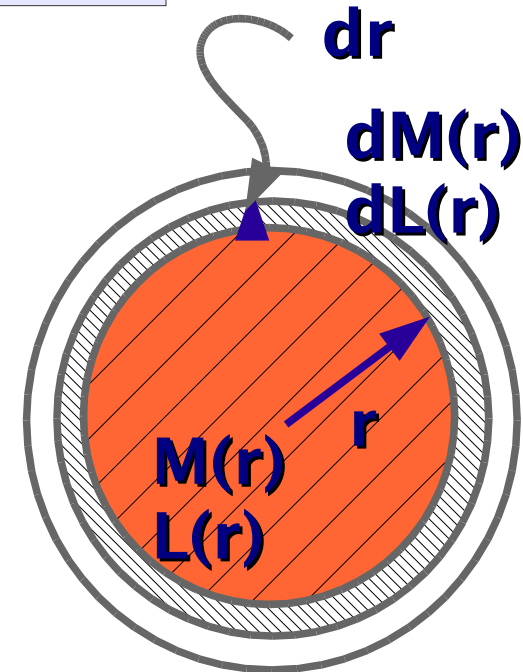
$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM_r \rho}{r^2}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{\partial L(r)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \epsilon(r)$$

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r}$$

bei Strahlungstransport





## 9.3. Sternaufbau

**Überblick: Gleichungssystem:** kein Prüfungsstoff -> “Stellar Physics”

3) Energieerzeugung, Opazität (später):  $\epsilon = \epsilon(\rho, T); \kappa = \kappa(\rho, T)$

4) **Zustandsgleichungen** schließen das Gleichungssystem:

- monoatomisches Gas:

$$e = e(\rho, T) = \rho u = \frac{3}{2} \frac{k_B}{\mu m_H} \rho T$$

$$P = P(\rho, T) = \frac{k_B}{\mu m_H} \rho T$$

- Strahlungsfeld (Photonen):

$$u = a T^4, \quad P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4, \quad a \equiv \frac{4}{c} \sigma_{SB}$$

Loesung von 1-4 auf dem Computer

## 9.3. Sternaufbau

**Abschätzungen aus den Gleichungen:**

-> Übungsaufgabe

1) Bilde Mittelwerte der Größen:

$$r \simeq \frac{1}{2}R ; \quad M(r) \simeq M ; \quad \bar{\rho} =$$

2) Differenzen statt Ableitungen:

$$\text{z.B.: } \frac{\partial P}{\partial r} \simeq \frac{\Delta P}{\Delta R} ; \quad \Delta P = ?? ; \quad P_c \gg P(R) ; \quad \Delta R = R$$

-> Abschätzung Zentraldruck:

$$P_c \simeq$$

-> Zentraltemperatur:

$$T_c \simeq$$

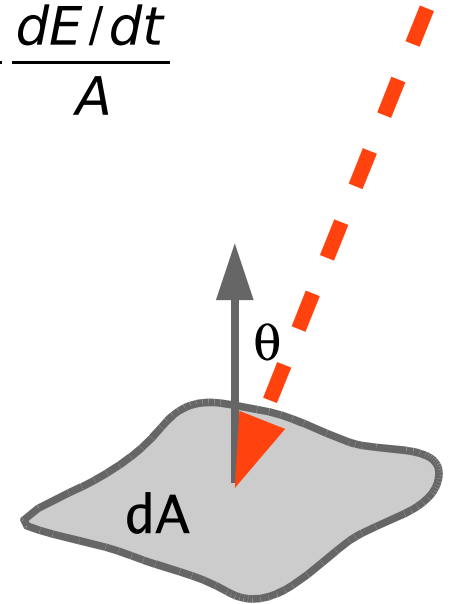
## 9.3. Sternaufbau

**Einschub: Strahlungsdruck:** Photon trägt Impuls  $p = hv/c = E/c$

-> Licht übt "Strahlungsdruck" aus:  $P = \frac{F}{A} = \frac{dp/dt}{A} = \frac{1}{c} \frac{dE/dt}{A}$

Strahlungsdruck eines Photonenstrahls mit Energie  $E_\lambda d\lambda$ , der im Winkel  $\theta$  auf Fläche  $dA$  fällt:

$$dP_{rad,\lambda} = \frac{1}{c} \frac{(E_\lambda/dt) \cos\Theta d\lambda}{dA}$$



-> Mit Intensität:  $I_\lambda d\lambda = \frac{E_\lambda d\lambda}{dt dA \cos\Theta d\Omega}$

-> Strahlungsdruck  
im isotropen Strahlungsfeld:

$$P_{rad,\lambda} = \frac{4\pi}{3c} I_\lambda d\lambda$$

## 9.3. Sternaufbau

Einschub: **Strahlungsdruck:**

-> Beispiel Schwarzkörper:  $I_\lambda = B_\lambda$

$$P_{rad} = \frac{4\pi}{3c} \int B_\lambda d\lambda = \frac{4\pi}{3c} \frac{\sigma_{SB} T^4}{\pi} = \frac{4}{3c} \sigma_{SB} T^4 = \frac{1}{3} u$$

->  $P_{rad} = u/3$  mit Energiedichte  $u = \frac{4}{c} \sigma_{SB} T^4$

-> Raumtemperatur:

$$P_{rad} = 1.8 \times 10^{-6} \text{ Pa} = 1.8 \times 10^{-12} \text{ atm}$$

-> Bei  $T = 10^7 \text{ K}$ :

$$P_{rad} = 2.3 \times 10^6 \text{ atm}$$

**Strahlungsdruck nur in sehr heißen Sternen wichtig**

# 9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

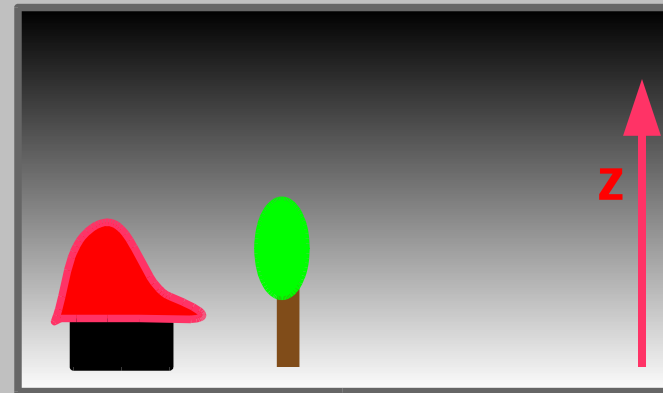
## 9.4 Energietransport

- > Konvektion
- > Strahlungsdiffusion

## 9.3. Sternaufbau

Planparalleles Atmosphärenmodell:

-> Sterne, (Planeten)



Was bestimmt die Temperaturverteilung?

$T(z)$  wird im Stern von komplizierten Prozessen bestimmt, u.a.:

- Energietransport durch **Strahlung** (Strahlungstransport)

- **Energietransport durch Konvektion**

- Heizung durch **Stoßwellen**

- Heizung durch “magnetische **Rekonnektion**”

- **Wärmeleitung**

- ggfs. externe **Anstrahlung** (Heizung)

- usw

Manche Prozesse für Sterne nicht genau verstanden

## 9.4. Energietransport

### Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

-> immer im **Druckgleichgewicht** mit der Umgebung:

-> **adiabatische Ausdehnung**, so dass immer gilt

$$P_{\text{innen}} = P_{\text{außen}}$$

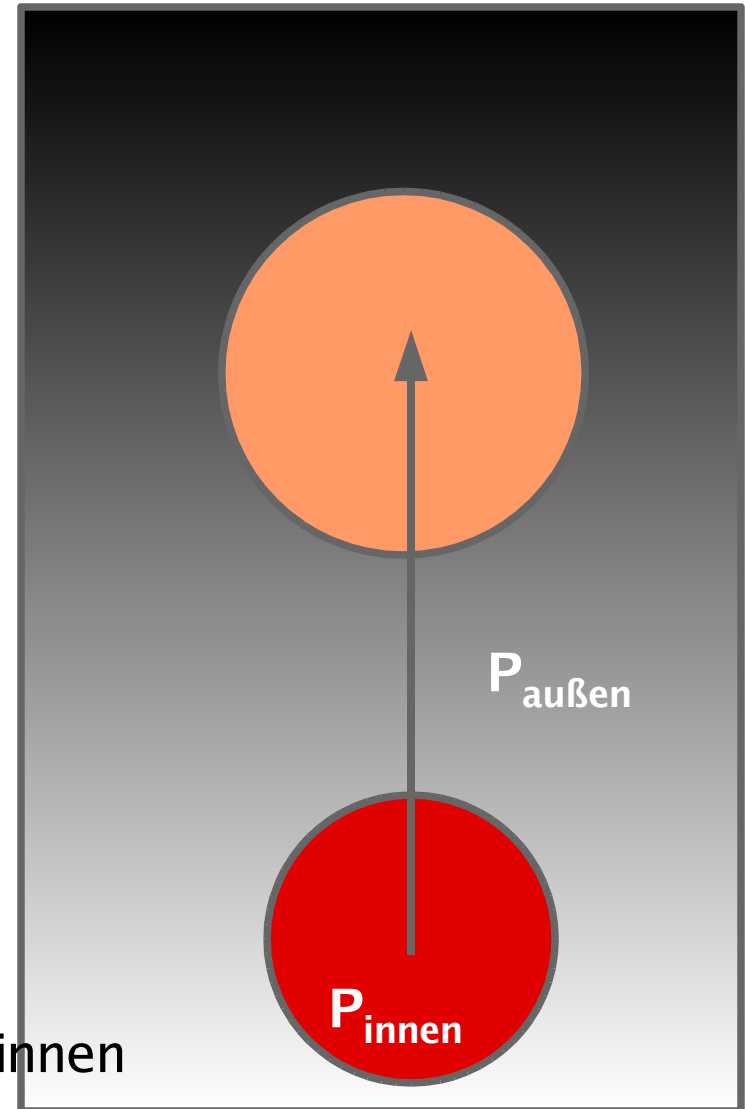
-> Adiabatangleichung:

$$P \propto V^{-\gamma} \propto \rho^{\gamma} \propto T^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Adiabatenexponent  $\gamma$

-> **Außendruck**  $P_{\text{außen}}(z)$  ist Lösung der **hydrostatischen** Gleichung

-> betrachte Dichteänderungen außen/innen



## 9.4. Energietransport

### Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck  $P_{\text{außen}}(z)$  ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

#### 1) Konvektive Atmosphäre:

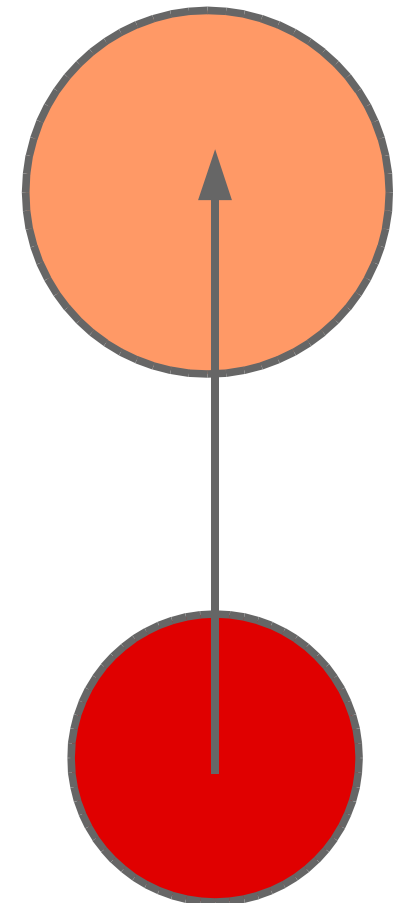
$$\rho_{\text{innen}} < \rho_{\text{außen}} \quad \text{bei} \quad P_{\text{innen}} = P_{\text{außen}}$$

- > Blase steigt weiter, da leichter als Umgebung
- > instabil

#### 2) Stabile Atmosphäre:

$$\rho_{\text{innen}} > \rho_{\text{außen}} \quad \text{bei} \quad P_{\text{innen}} = P_{\text{außen}}$$

- > Blase steigt sinkt, da schwerer als Umgebung
- > stabil





## 9.4. Energietransport

### Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck  $P_{\text{außen}}(z)$  ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Zur Berechnung:  $P \propto \rho^\gamma \rightarrow \rho \propto P^{1/\gamma}$

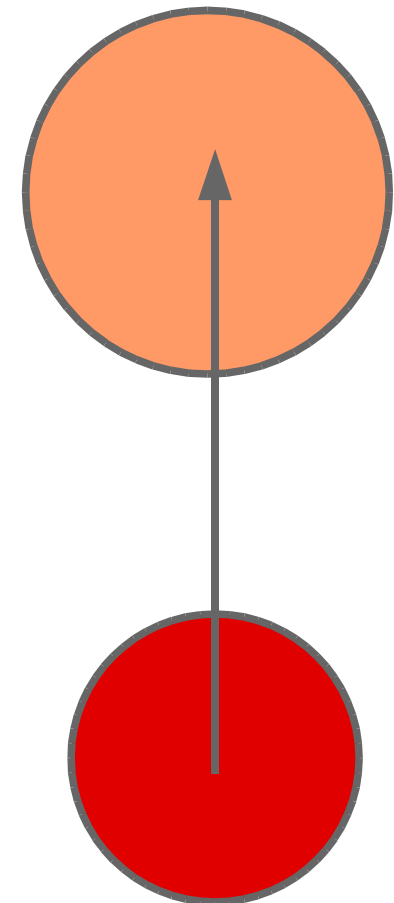
- > doppelt-logarithmische Ableitung:

$$\left[ \frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{\gamma}$$

### Schwarzschild-Kriterium:

- > stabile Atmosphäre für

$$\left[ \frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{Atmosphäre}} > \left[ \frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{\gamma}$$



## 9.4. Energietransport

### Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck  $P_{\text{außen}}(z)$  ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Berechnung:  $P \propto \rho^\gamma \rightarrow \rho \propto P^{1/\gamma}$

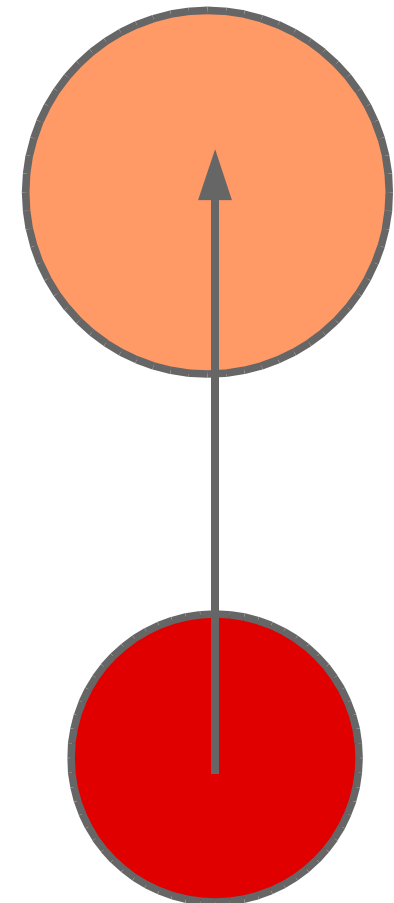
- > doppeltlogarithmische Ableitung:

$$\left[ \frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{\gamma}$$

### Schwarzschild-Kriterium:

- > konvektive Atmosphäre für

$$\left[ \frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{Atmosphäre}} < \left[ \frac{d \ln \rho}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{\gamma}$$



## 9.4. Energietransport

### Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck  $P_{\text{außen}}(z)$  ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Berechnung:  $P \propto T^{\gamma/(\gamma-1)} \rightarrow T \propto P^{(\gamma-1)/\gamma}$

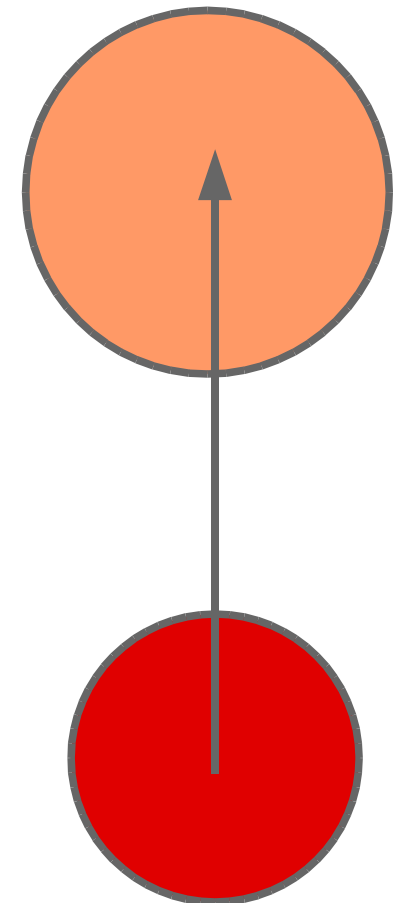
- > doppelt-log. Ableitung, “Adiabatengradient”:

$$\nabla_{ad} \equiv \left[ \frac{d \ln T}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

### Schwarzschild-Kriterium:

- > konvektive Atmosphäre für

$$\left[ \frac{d \ln T}{d \ln P} \right]_{\text{Atmosphäre}} > \left[ \frac{d T}{d \ln P} \right]_{\text{adiabatisch}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$



## 9.4. Energietransport

### Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck  $P_{\text{außen}}(z)$  ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Betrachte Gradienten (Dichte):

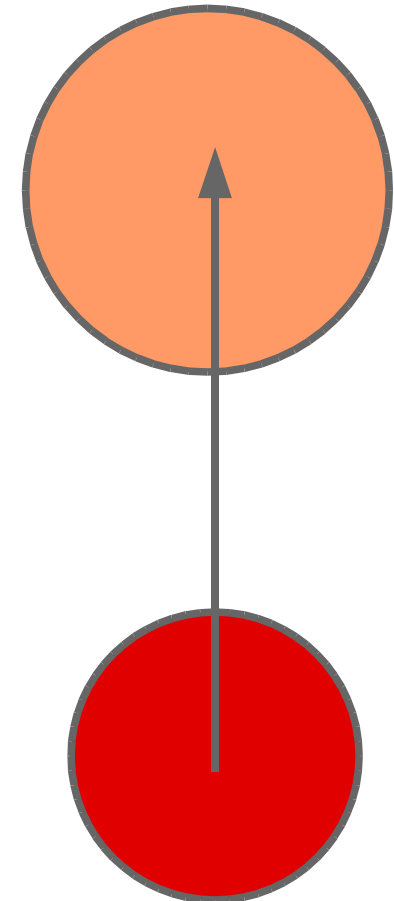
- > Ableitung der Dichte:

$$\left[ \frac{d\rho(z)}{dz} \right]_{\text{ad}} = \left[ \frac{d\rho}{dP} \right]_{\text{ad}} \frac{dP(z)}{dz} = \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP(z)}{dz}$$

### Schwarzschild-Kriterium:

- > konvektive Atmosphäre für

$$\left[ \frac{d\rho(z)}{dz} \right]_{\text{Atmosphäre}} > \left[ \frac{d\rho(z)}{dz} \right]_{\text{adiabatisch}}$$



## 9.4. Energietransport

### Energietransport durch Konvektion:

Aufsteigende Gasblase:

- > Außendruck  $P_{\text{außen}}(z)$  ist Lösung der hydrostatischen Gleichung
- > betrachte Dichteänderungen außen/innen

Betrachte Gradienten (Temperatur):

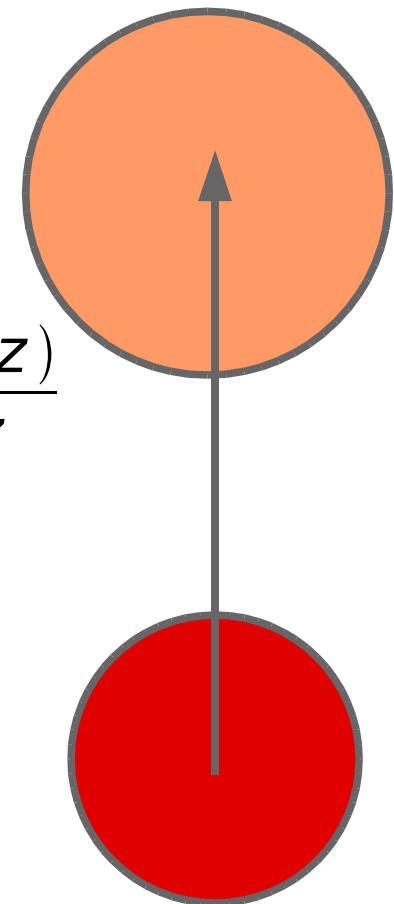
- > Ableitung der Temperatur:

$$\left[ \frac{dT(z)}{dz} \right]_{\text{ad}} = \left[ \frac{dT}{dP} \right]_{\text{ad}} \frac{dP(z)}{dz} = \frac{(\gamma-1) T}{\gamma P} \frac{dP(z)}{dz}$$

### Schwarzschild-Kriterium:

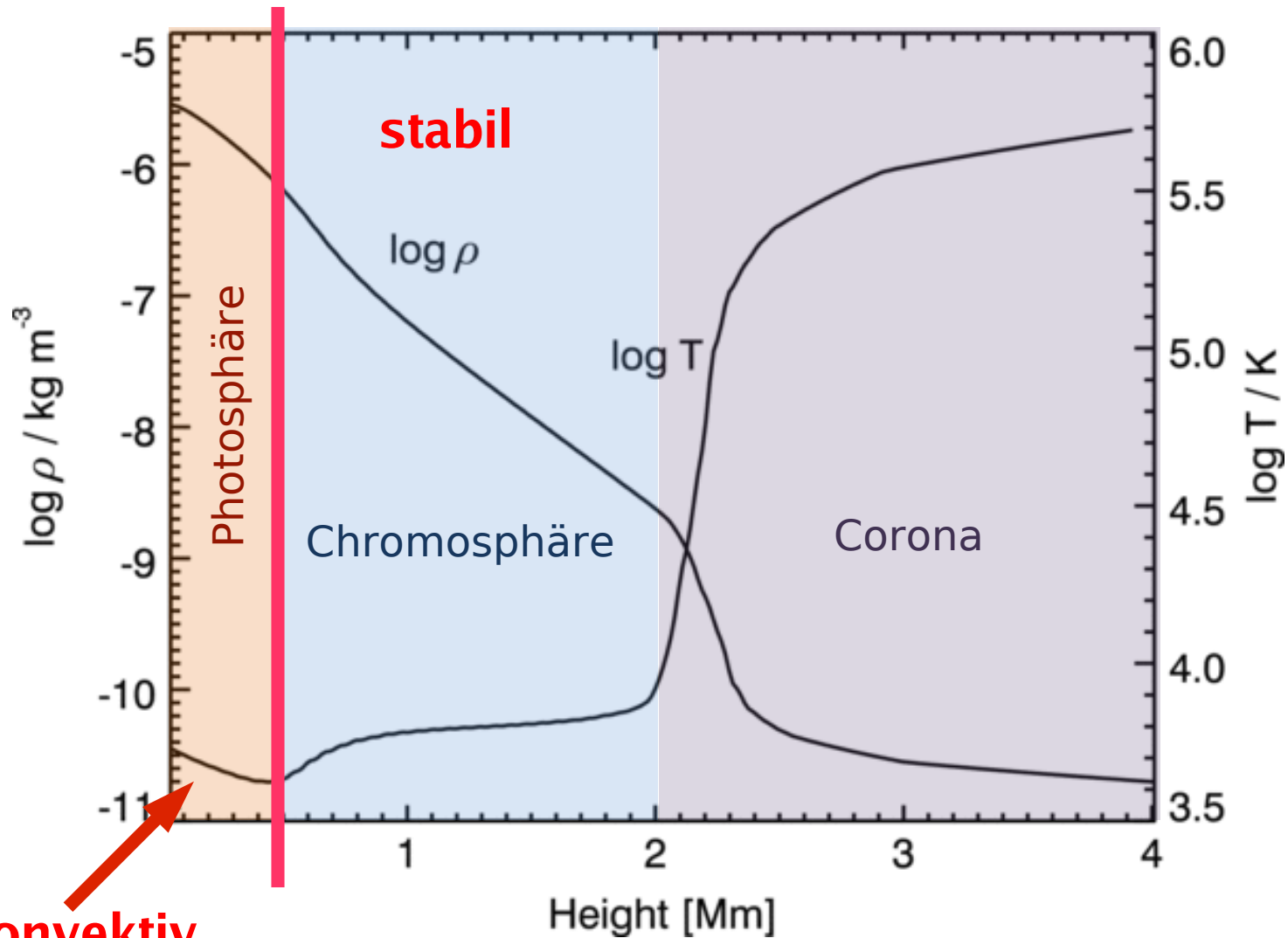
- > konvektive Atmosphäre für

$$\left[ \frac{dT(z)}{dz} \right]_{\text{Atmosphäre}} < \left[ \frac{dT(z)}{dz} \right]_{\text{adiabatisch}}$$



## 9.4. Energietransport

**Beispiel Sonne:** 1D Modellierung Photosphäre bis Korona



**Konvektiv**

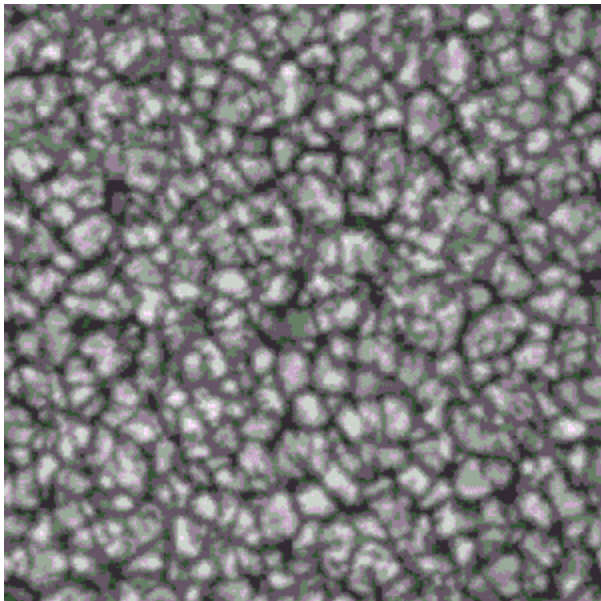
Model by Fedun, Shelyag, Erdelyi (2011)

# 9.4. Energietransport

## Beispiel Sonnenphotosphäre

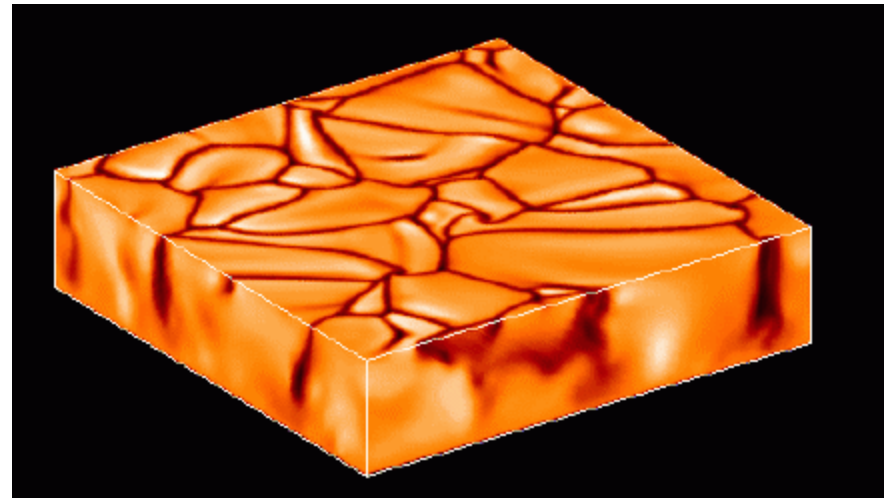
Beobachtung:

—— ~5000km



From:  
<http://ircamera.as.arizona.edu/hysast.uga.edu/>

Numerische Simulation:



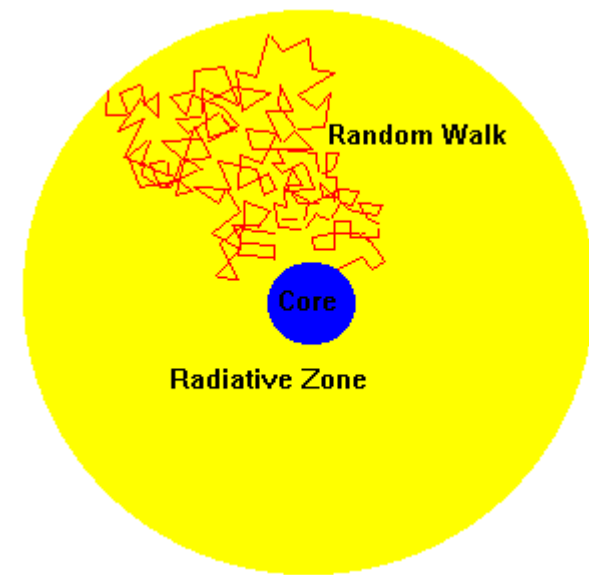
[people.hao.ucar.edu/yfan/subsurface.html](http://people.hao.ucar.edu/yfan/subsurface.html)

## 9.4. Energietransport

### Energie-Transport durch Strahlung:

Transparentes Medium ( $\tau \ll 1$ ):

Leuchtkraft  $L(r)$  durch Integration der emittierten Photonen bei jedem Radius  $r$   
(bei Kenntnis von Dichte, Temperatur, Besetzungszahlen)



Im realen Stern:

Mittlere freie Weglänge  $L_{ph}$  der Photonen:  $L_{ph} = (\kappa \rho)^{-1}$

**Achtung:** traditionell wird beim Thema Sternaufbau der Massenabsorptionskoeffizient verwendet, z.B.  $d\tau = \kappa \rho ds$

Bsp. **Sonne:** mit mittlerem Absorptionskoeffizienten  $\kappa = 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$  (Thomson-Streuung), und mittlerer Dichte  $\rho = 1.4 \text{ g/cm}^3 \rightarrow L_{ph} \sim 2 \text{ cm}$

Das Entweichen der Photonen aus einem Stern ist ein **diffusiver Prozeß**



## 9.4. Energietransport

### Diffusiver Strahlungstransport:

Ansatz:

Gradient in der Photonen- **Energiedichte**  $u$   
führt zu Diffusion und damit zu einem Netto-  
Photonentransport:

$$F = -D \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{allgemein:} \quad F = -D \nabla u$$

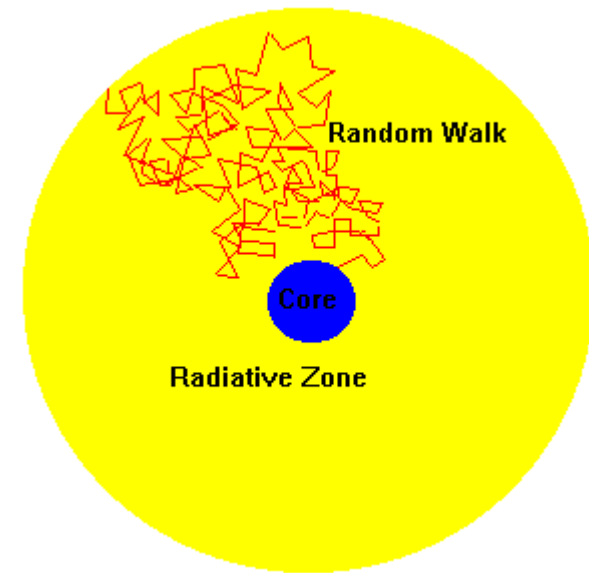
mit Diffusionskoeffizient:  $D \equiv \frac{1}{3} L_{ph} c$  ;  $L_{ph} \sim \frac{1}{\kappa \rho}$

-> mit Stefan-Boltzmann  $F = \sigma_{SB} T^4$ , bzw.  $u = (4\sigma_{SB}/c) T^4 = aT^4$

### Strahlungsfluß im Stern:

$$F = \frac{L_r}{4\pi r^2} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r}$$

-> Energietransport:  $F \sim \kappa^{-1}$



## 9.4. Energietransport

### Energietransport durch Strahlung:

Problem: Opazitäten für radiativen Energietransport ??

Absorptionskoeffizient  $\kappa = \kappa(\rho, T)$  in  $\text{cm}^2/\text{g}$

ist Funktion von: **chemischer** Zusammensetzung, **Ionisationsstufe**,  
**Besetzungszahlen** atomarer Energieniveaus

-> **Atomphysikalische** Rechnungen liefern frequenz-abhängigen  
Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  (tabellarisch, z.B. OPAL-Tabellen)

-> für Sternaufbau: **Rosseland'scher Mittelwert** über Frequenzen:

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} = \frac{\pi}{a c T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu$$

-> Merke: Energietransport:  **$F \sim \kappa^{-1}$**

# 9.4. Energietransport

## Rosseland'sche Opazität:

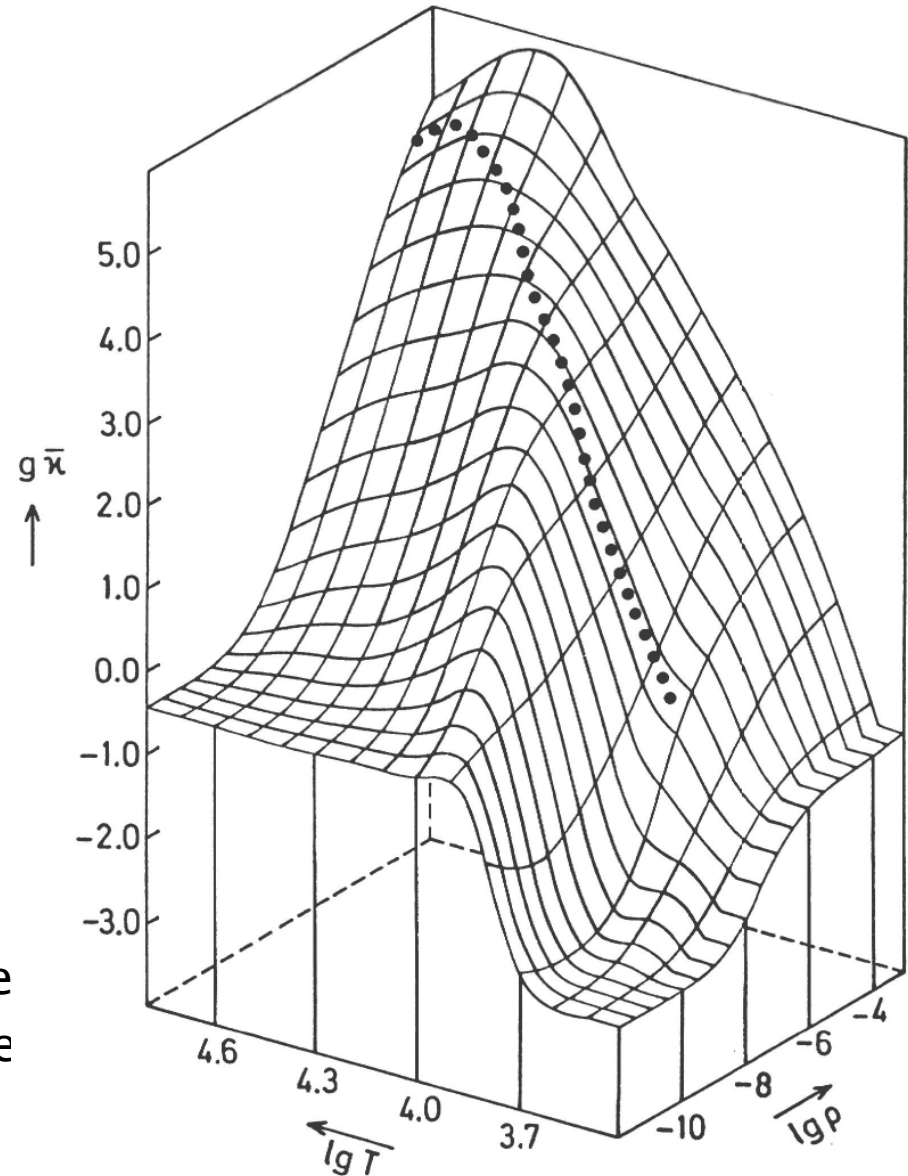
Beispiele von Computermodellen  
(aus Kippenhahn-Weigert)

Rosseland-Opazität als  
Funktion von  
Dichte und Temperatur  
(Los Alamos code)

Massenverhältnisse  
 $X=0.739$  und  $Y=0.240$

-> entsprechend der  
äußeren Schichten  
eines Sterns

Werte für **Sonne** gepunkte  
(Beginn rechts mit Photosphäre



## 9.3. Sternaufbau

### Adiabatengradient:

Praxis: Aus Kenntnis von  $L_r$ ,  $M_r$ ,  $\rho$ ,  $T$  bei Radius  $r$  -> berechne  $\nabla_{rad}$ ,  $\nabla_{ad}$

-> für  $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$

radiativer Energietransport:

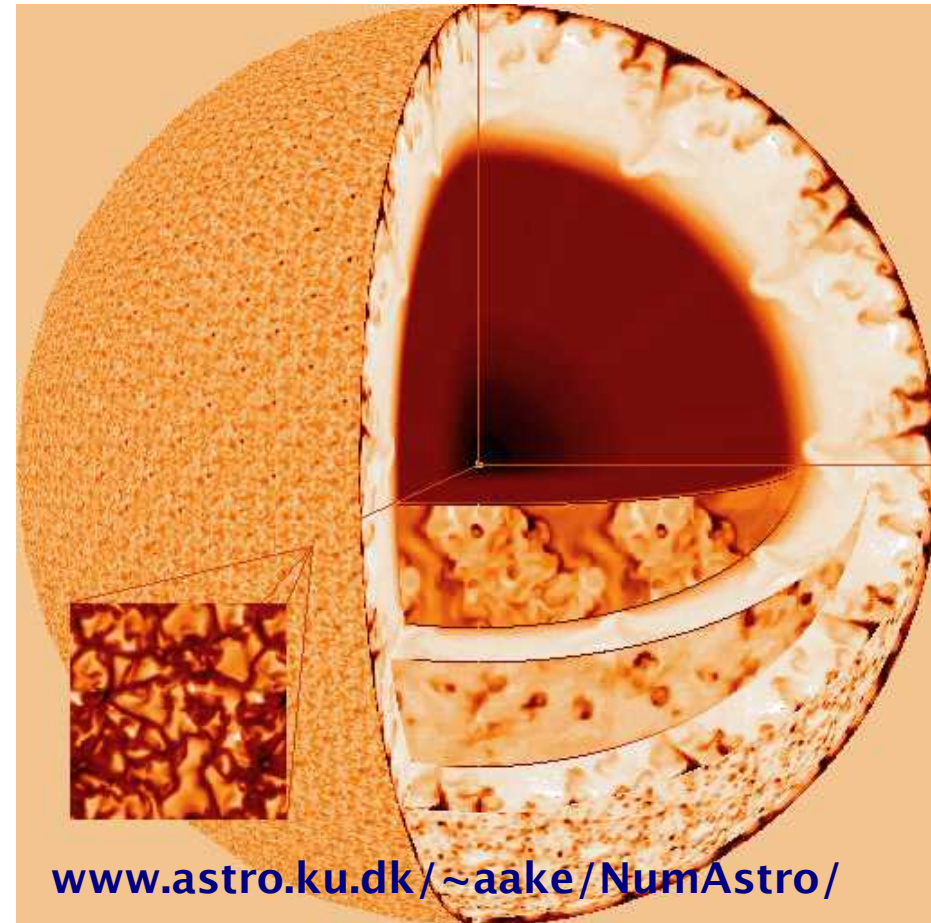
$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{3 \kappa \rho}{4 a c T^3} \frac{L_r}{4 \pi r^2}$$

-> für  $\nabla_{rad} < \nabla_{ad}$

konvektiver Energietransport:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{GM_r}{r^2} \rho$$

Numerische Simulation der Sonnenhülle

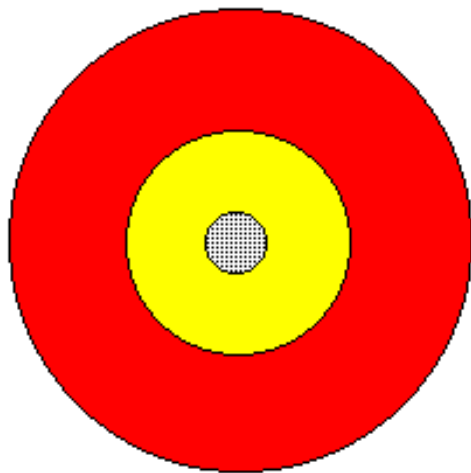


## 9.4. Energietransport

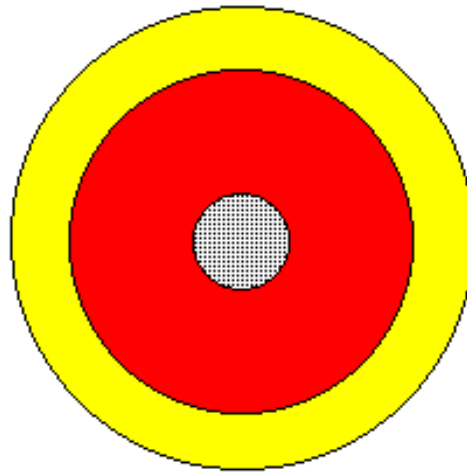
### Sternstruktur verschiedener Sternklassen (Hauptreihe)

- > Unterschiedliche Lage der radiative/konvektive Zonen:
  - “obere” Hauptreihe: radiative Hülle, konvektiver Kern
  - “untere” Hauptreihe: konvektive Hülle, radiativer Kern

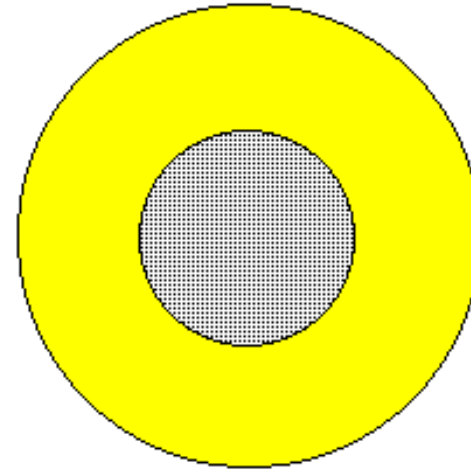
Internal Structure for Main Sequence Stars



O star  
(60 solar masses)



G star  
(1 solar mass)



M star  
(0.1 solar masses)



radiative zone



convective zone



nuclear burning region

# 9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

## Zusammenfassung

- > **Wiederholung:** Spektraltypen: O-B-A-F-G-K-M-R-N, Effektivtemp., Leuchtkraftklassen (Riesen / Zwerge), Sternradien, Hertzsprung-Russell-Diagramm
- > **Sternparameter:** Radius, Masse, Massenbestimmung durch Doppelsterne, Metallizität
- > **Masse-Leuchtkraft-Beziehung:** fundamental für Astrophysik
- > **Sonne:** phenomenologisch: äußere Schichtung, Aktivität, Flecken, Ausbrüche, Protuberanzen
- > **Sternaufbau:** Grundlegende Annahmen, hydrostatische Schichtung, Strahlungsdruck, grundlegende Gleichungen (kein Prüfungsstoff)
- > **Energietransport** durch Konvektion und Strahlungsdiffusion, Opazitäten

# Einführung in die Astronomie und Astrophysik I

- 17.10. Einführung: Überblick & Geschichte (H.B.)
- 24.10. Sternpositionen, Koordinaten, Zeitmessung (C.F.)
- 31.10. Teleskope und Instrumentierung (H.B.)
- 07.11. Strahlung, Strahlungstransport (C.F.)
- 14.11. Planetensystem(e) & Keplergesetze (H.B.)
- 21.11. Sterne, Typen / Klassifikation, HR-Diagramm (C.F.)
- 28.11. Interstellare Materie: Chemie & Matriekreislauf (H.B.)
- 05.12. Sternentstehung, Akkretionsscheiben & Jets (H.B.)
- 12.12. Sternaufbau & -entwicklung I: Sternparameter, Hauptreihe (C.F.)
- 19.12. Sternaufbau & -entwicklung II: Energieerzeugung, Endstadien (C.F.)**
- - - Weihnachtspause
- 09.01. Mehrfachsysteme & Sternhaufen, Dynamik (C.F.)
- 16.01. Exoplaneten & Astrobiologie (H.B.)
- 23.01. Die Milchstraße (H.B.)
- 30.01. Zusammenfassung (C.F. & H.B.)
- 08.02. (Samstag) Prüfung: 15:00 - 17:00, INF 227**

## 9. Sternstruktur & Sternentwicklung - I

# Appendix



## 9.1. Weitere Sternparameter

### Einschub: Inklination der Bahnebene

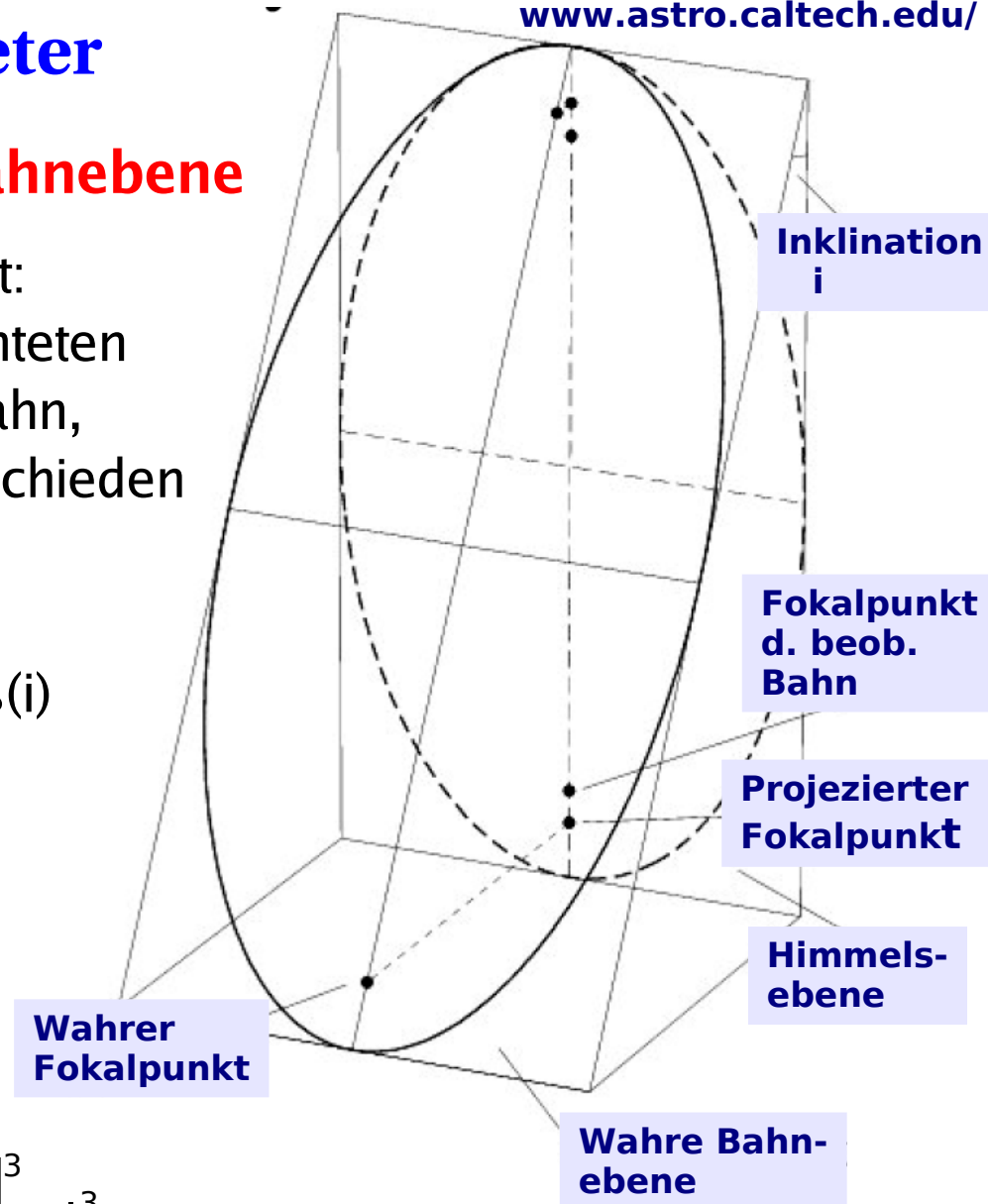
- > scheinbare Bahnellipse verzerrt:  
(Haupt-) Stern nicht im beobachteten **Fokalfunkt** der scheinbaren Bahn,  
beobachtete **Exzentrizität** verschieden  
von wahrer Exzentrizität:
- > wahre Halbachse  $\alpha$ ,  
scheinbare Halbachse  $\alpha \cos(i)$

- > Inklination ändert nicht das  
beob. **Massenverhältnis**:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2 \cos i}{\alpha_1 \cos i} = \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1}$$

aber die **Gesamtmasse**:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2}{GP^2} \left[ \frac{D}{\cos i} \right]^3 \alpha^3$$

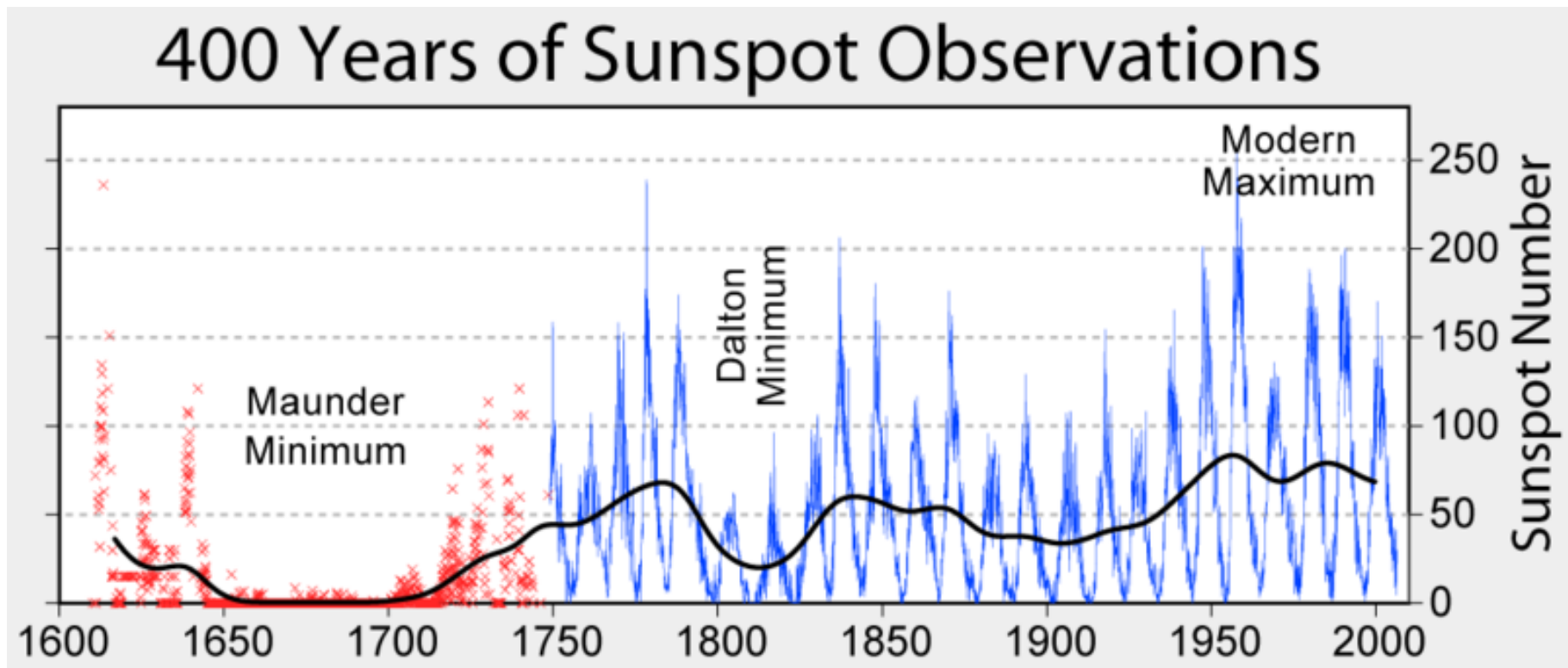


- > **Inklination  $i$  kann bestimmt werden, falls Bahn genügend genau beobachtet**

## 9.2. Die Sonne

### Sonnenflecken

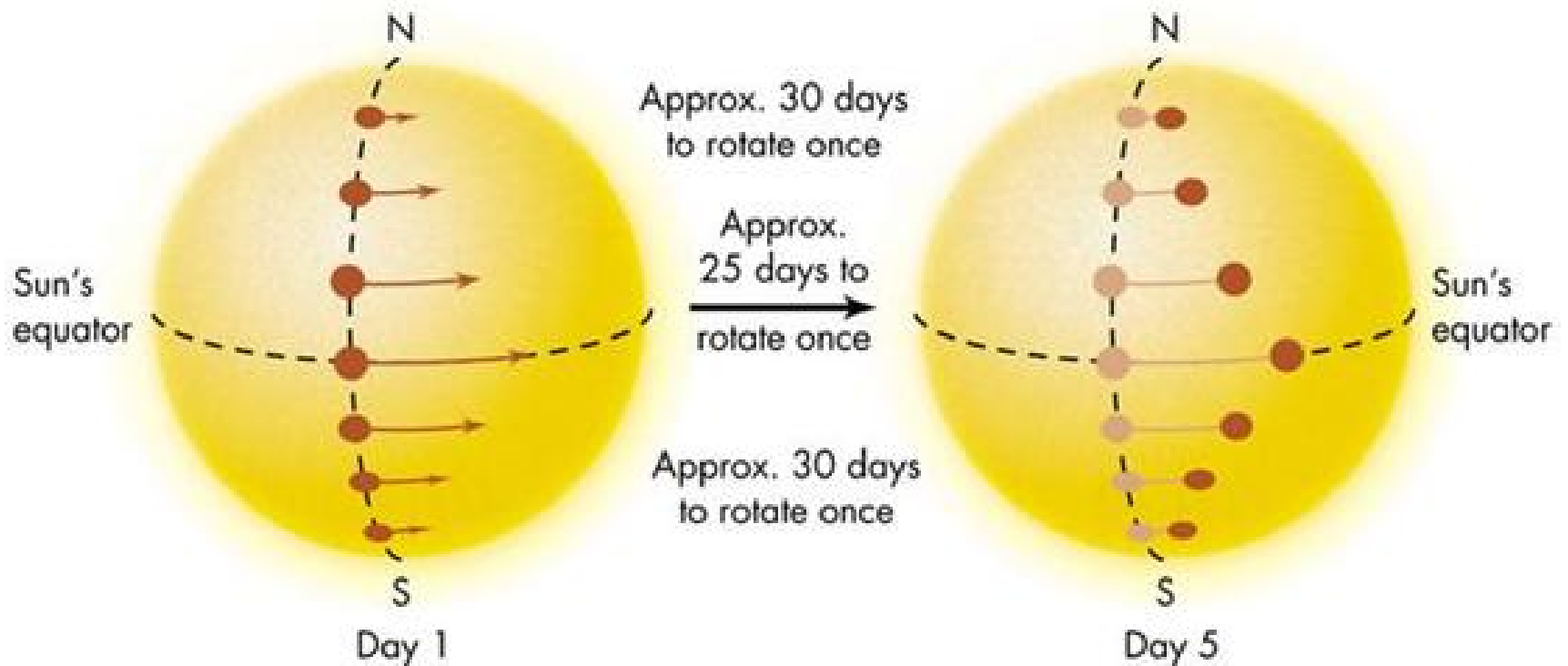
Langzeitige Variation der Sonnenaktivität,  
ungelöstes Problem: Entstehung? Dauer? der Minima



## 9.2. Die Sonne

### Sonnenflecken: Schmetterlingsdiagramm:

Position der Sonnenflecken (heliographische Breite) variiert mit der Zeit durch differentielle Rotation und den 11-jhr. Dynamo-Zyklus der Magnetfelderzeugung):

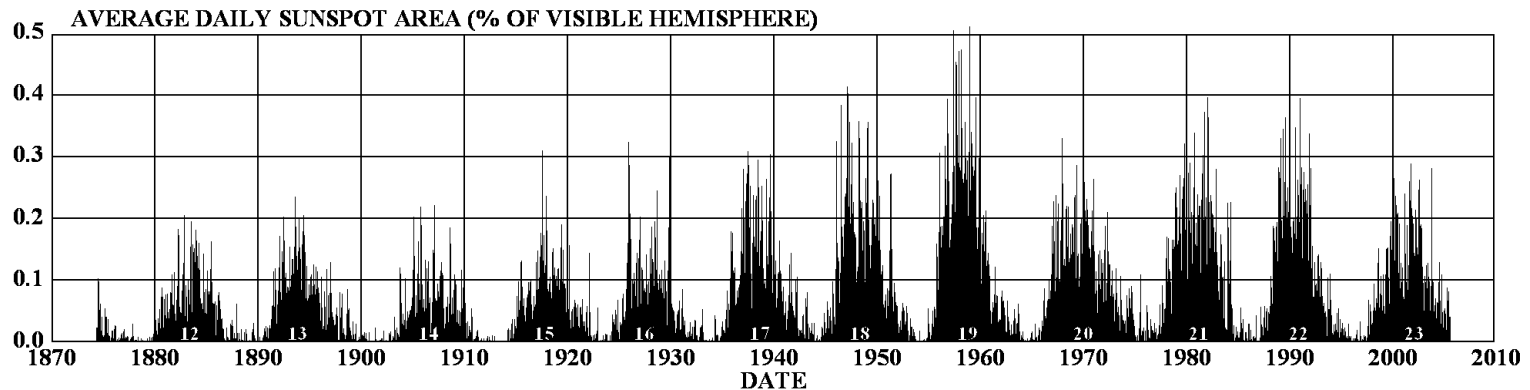
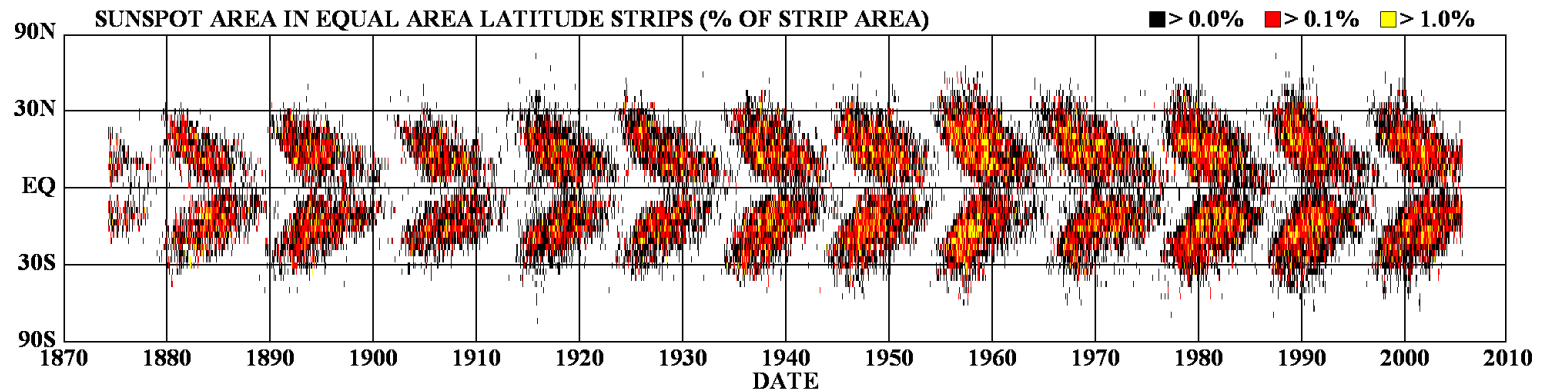


## 9.2. Die Sonne

### Sonnenflecken: Schmetterlingsdiagramm:

Position der Sonnenflecken (heliographische Breite) variiert mit der Zeit (differentielle Rotation, Dynamo-Zyklus):

#### DAILY SUNSPOT AREA AVERAGED OVER INDIVIDUAL SOLAR ROTATIONS



## 9.3. Sternaufbau

### Adiabatengradient:

Adiabatische Zustandgleichung:  $P \propto \rho^\gamma \rightarrow T \propto P^{1-1/\gamma}$

-> Ableitung:  $(d \ln T)_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) (d \ln P)_{ad}$

-> Definition: Adiabatengradient:  $\nabla_{ad} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$

-> Konvektionsinstabilität erfordert:

$$\nabla_{ad} < \nabla_{rad}$$

### Schwarzschild-Kriterium für Konvektion

-> Aus Energietransport- Gleichung  $F = \frac{L(r)}{4\pi r^2} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r}$

und hydrostatischem GG  $\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$

folgt  $\nabla_{rad} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{rad} = \frac{3\kappa P}{16\pi acGT^4} \frac{L(r)}{M(r)}$

## 9.3. Sternaufbau

### Adiabatengradient:

Praxis: Aus Kenntnis von  $L_r$ ,  $M_r$ ,  $\rho$ ,  $T$  bei Radius  $r$  -> berechne  $\nabla_{rad}$ ,  $\nabla_{ad}$

-> für  $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$

radiativer Energietransport:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{3 \kappa \rho}{4 a c T^3} \frac{L_r}{4 \pi r^2}$$

-> für  $\nabla_{rad} < \nabla_{ad}$

konvektiver Energietransport:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{GM_r}{r^2} \rho$$

Numerische Simulation der Sonnenhülle

