



## Gammablitz und Hawking-Strahlung

Im Leserbrief von Herrn Frank Müller auf Seite 626 in diesem Heft wird die Frage aufgeworfen, ob nicht jene auch nach Beobachtung im Optischen immer noch recht mysteriösen Gamma-ray-Blitze mit der finalen Explosion verdampfender Schwarzer Löcher in Verbindung gebracht werden könnten. Ulrich Bastian, der auf der Leserbriefseite die Antwort an Herrn Müller verfaßt hat, lieferte das fertige Gerüst für die folgenden Aufgaben.

Der von der heimtückischen Krankheit ALS gezeichnete britische Astrophysiker Stephen W. Hawking ist seit 1979 Inhaber des Lucasischen Lehrstuhls für Mathematik an der Universität Cambridge, den vor ihm so große Geister wie Newton und Dirac innehatten. Er fand 1974 heraus, daß Schwarze Löcher aufgrund von Quanteneffekten nicht wirklich schwarz sind, sondern eine von ihrer Masse abhängige Temperatur aufweisen und über ihre Abstrahlung ständig Masse verlieren. Dieser Vorgang geht umso schneller, je geringer die Masse des Loches wird. Schließlich verschwindet es in einer finalen Explosion. Als anschauliche Erklärung mag dienen, daß am Ereignishorizont durch die bei kleinem Schwarzschildradius zunehmend starke Gezeitenkraft virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare separiert werden, so daß eines der beiden im Schwarzen Loch verschwindet, während das andere entkommt – das Schwarze Loch hat ein Teilchen emittiert.

**Aufgabe 1:** Die Temperatur  $T$  eines Schwarzen Lochs ist nach den Erkenntnissen von Hawking gegeben durch:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8 \pi G k M} \quad (1)$$

Dabei ist  $\hbar = h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34}$  J s die durch  $2\pi$  geteilte Plancksche Konstante,  $c = 2.998 \cdot 10^8$  m/s die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,  $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup> die Gravitationskonstante,  $k = 1.381 \cdot 10^{-23}$  J/K die Boltzmannsche Konstante und  $M$  die Masse des Schwarzen Lochs hängt somit nur von einigen Naturkonstanten und seiner Masse ab. Man bestimme den Wert des Vorfaktors  $f_1$  in Gleichung (1), wobei  $T = f_1/M$ .

**Aufgabe 2:** Man bringe Gleichung (1) in die Form:

$$T = \frac{f_2}{M/M_\odot}$$

in der die Masse des Schwarzen Lochs in Einheiten der Sonnenmasse  $M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$  kg dargestellt wird, und bestimme  $f_2$ .

**Aufgabe 3:** Welche Temperatur hat demnach ein Schwarzes Loch von insgesamt drei Sonnenmassen?

**Aufgabe 4:** Unter der Voraussetzung, daß die Gesamtenergie eines Gammabursts derjenigen einer Supernovaexplosion entspricht und deshalb die Energie  $E = M_E c^2 \approx 10^{44}$  J habe, berechne man **a)** die Masse  $M_E$  des hypothetischen Schwarzen Lochs, das für den Gammablitz vergehen soll. **b)** Welche Temperatur  $T_E$  hat das Schwarze Loch bei dieser Masse?

Die Leuchtkraft eines Temperaturstrahlers ist gegeben durch  $L = F \sigma T^4$  (Stefan-Boltzmannsches Gesetz,  $\sigma = 5.669 \cdot 10^{-8}$  J m<sup>-2</sup> K<sup>-4</sup> s<sup>-1</sup>). Dabei ist  $F$  die Oberfläche des Strahlers, im Falle eines Schwarzen Lochs also  $F = 4 \pi R_S^2$ , mit dem Schwarzschildradius  $R_S = 2 G M/c^2$ .

**Aufgabe 5:** Wie groß ist demnach die Leuchtkraft des hypothetischen Schwarzen Lochs und kann dies als Gammaburst bezeichnet werden?

**Aufgabe 6:** Das Wiensche Verschiebungsgesetz beschreibt die Wellenlänge des Emissionsmaximums eines Schwarzkörperstrahlers der Temperatur  $T$ . Es lautet:

$$\lambda_{\max} = 0.2014 h c/k T.$$

**a)** Man bestimme die Wellenlänge des Emissionsmaximums. **b)** Die Energie der beobachteten Gammabursts liegt ganz grob bei 200 keV. Die zugehörige Wellenlänge ergibt sich mit Hilfe von  $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}$  J und  $E = h \nu$  sowie  $\lambda \nu = c$ . Kann unser hypothetisches Schwarzes Loch demnach Gammastrahlung emittieren?

**Zusatzaufgabe:** Man skizziere den Weg vom Planckschen Strahlungsgesetz zum Wienschen Verschiebungsgesetz und erläutere insbesondere die Herkunft des Vorfaktors 0.2014.

Im zweiten Teil soll untersucht werden, ob bei hinreichend kleiner Masse eine ausreichende Temperatur erzeugt wird und wie groß die Lebensdauer eines solchen Schwarzen Loches ist. *Axel M. Quetz*

### Lösung der Aufgabe aus dem Mai-Heft

**Aufgabe 1:** Die lineare Entfernung des Kleinplaneten (386) Siegena zur Erde sollte aus der Parallaxe des Erdradius ermittelt werden. Dazu betrachte man Abb. 1. An ihr läßt sich im rechtwinkligen Dreieck Siegena-Erdmittelpunkt-Erdoberfläche die Beziehung ablesen:

$$\tan \pi = \frac{R_\oplus}{\Delta} \quad \text{bzw.} \quad \Delta = \frac{R_\oplus}{\tan \pi}$$

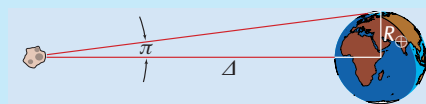


Abb. 1: Die Parallaxe  $\pi$ , unter der der Erdradius von Siegena aus erscheint, definiert den Abstand Kleinplanet-Erde.

Mit  $\pi = 3''69$  und  $R_\oplus = 6378$  km folgt:

$$\Delta = 356.5 \text{ Mio. km} = 2.38 \text{ AE.}$$

Der Kleinplanet befindet sich demnach in mehr als doppelter Sonnenentfernung zur Erde.

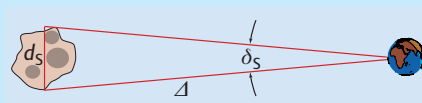


Abb. 2: Dem linearen Durchmesser  $d_s$  des Planetoiden entspricht der Winkeldurchmesser  $\delta_s$ .

**Aufgabe 2:** Aus Abb. 2 läßt sich die Gleichung für den scheinbaren Durchmesser  $\delta_s$  von (386) Siegena ablesen:

$$\delta_s = \arctan \frac{d_s}{\Delta}$$

Mit dem Durchmesser  $d_s = 173$  km von (386) Siegena folgt:

$$\delta_s = 0''10.$$

In der gegebenen Entfernung liegt die scheinbare Größe des Asteroiden an der Grenze des Auflösungsvermögens moderner Teleskope mit Adaptiver Optik, etwa auf dem Calar Alto, oder weltraumgestützter, wie des HST.

**Aufgabe 3:** Die Kenntnis der Position des Kleinplaneten im Sonnensystem ist mit einer kleinen Unsicherheit behaftet. Als Folge ist die Lage des Schattenpfades auf der Erdoberfläche



Abb. 3: Der Ortsunsicherheit  $\delta_E$  des Planetoiden entspricht auf der Erdoberfläche die Distanz  $d_E$  um die der Schattenverlauf unbekannt ist.

che nicht genau bekannt, sondern kann um die Strecke  $d_E$  abweichen. Abb. 3 verrät:

$$\tan \delta_E = \frac{d_E}{\Delta} \quad \text{bzw.} \quad d_E = \Delta \tan \delta_E$$

Mit  $\delta_E = 0''5$  ergibt sich:

$$d_E = 864 \text{ km.}$$

Somit gab es auch für westeuropäische Beobachter der Bedeckung des Sterns TYC 0438 00092 am 11. Mai, deren Schattenpfad quer durch Afrika laufen sollte, eine gewisse Sichtwahrscheinlichkeit. *Axel M. Quetz*